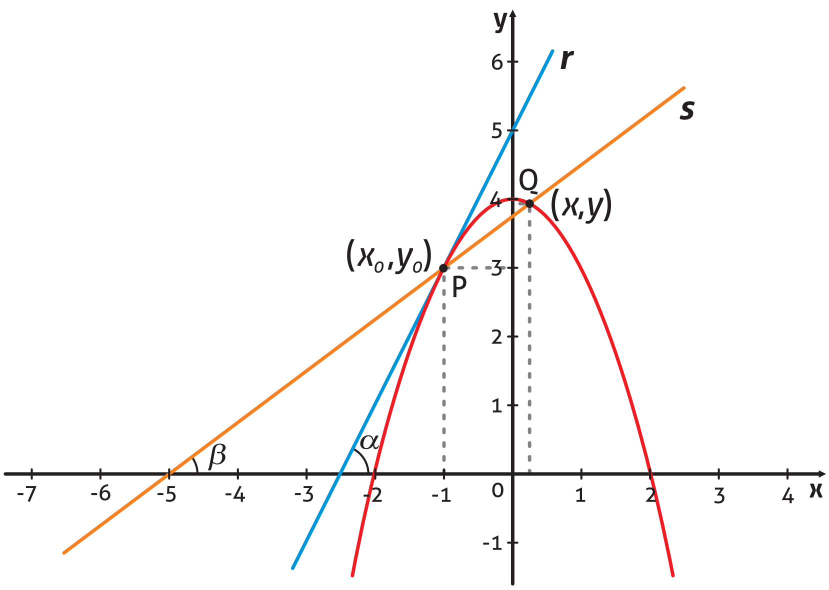
UNIVERSIDADE ABERTA DO BRASIL

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA

CENTRO DE CIÊNCIAS NATURAIS E EXATAS

CURSO DE GRADUAÇÃO

EM FÍSICA – LICENCIATURA A DISTÂNCIA



LIMITES E DERIVADAS

3º semestre

Ministério da Educação

UM PAÍS DE TODOS

GOVERNO FEDERAL

Presidente da República Federativa do Brasil
Luiz Inácio Lula da Silva

Ministério da Educação

Ministro do Estado da Educação	Fernando Haddad
Secretária da Educação Superior	Maria Paula Dallari Bucci
Secretário da Educação a Distância	Carlos Eduardo Bielschowsky

Universidade Federal de Santa Maria

Reitor	Felipe Martins Müller
Vice-Reitor	Dalvan José Reinert
Chefe de Gabinete do Reitor	Maria Alcione Munhoz
Pró-Reitor de Administração	André Luis Kieling Ries
Pró-Reitor de Assuntos Estudantis	José Francisco Silva Dias
Pró-Reitor de Extensão	João Rodolpho Amaral Flôres
Pró-Reitor de Graduação	Orlando Fonseca
Pró-Reitor de Planejamento	Charles Jacques Prade
Pró-Reitor de Pós-Graduação e Pesquisa	Helio Leães Hey
Pró-Reitor de Recursos Humanos	Vania de Fátima Barros Estivalete
Diretor do CPD	Fernando Bordin da Rocha

Coordenação de Educação a Distância

Coordenador CEAD	Fabio da Purificação de Bastos
Coordenador UAB	Paulo Alberto Lovatto
Coordenador de Pólos	Roberto Cassol

Centro de Ciências Naturais e Exatas

Diretora do Centro de Ciências Naturiais e Exatas	Martha Bohrer Adaime
Coordenador do Curso de Física – Licenciatura a Distância	João Carlos Denardin

Elaboração do Conteúdo

Professor pesquisador/conteudista	Ivan Paulo Marques Alves

Equipe Multidisciplinar de Pesquisa e Desenvolvimento em Tecnologias da Informação e Comunicação Aplicadas à Educação

Coordenadora da Equipe Multidisciplinar Elena Maria Mallmann
Técnicas em Assuntos Educacionais Débora Marshall
Mariza Gorette Seeger

Produção de Recursos Educacionais

Coordenação Luiz Caldeira Brant de Tolentino Neto
Designers Gráficos Evandro Bertol
Marcelo Kunde
Ilustração Carlo Pozzobon de Moraes
Designer de Mediação Ingrid Nicola Souto

Atividades a Distância

Coordenação Ilse Abegg

Tecnologia Educacional

Coordenação Andre Zanki Cordenonsi
Giliane Bernardi
Professores Pesquisadores Bruno Augusti Mozzaquatro
Edgardo Gustavo Férnandez
Leandro Moreira Crescencio
Rosiclei Aparecida Cavichioli Lauermann
Tarcila Gesteira da Silva
Suporte Juliano Rafael Andrade
Vanessa Cassenote

SUMÁRIO

APRESENTAÇÃO DA DISCIPLINA

Carga horária: 75 horas-aula

OBJETIVOS GERAIS

Ao término da Disciplina, o aluno deverá ser capaz de:

- compreender e aplicar técnicas relativas a funções, continuidade, limites e derivadas;
- adquirir conhecimento para aplicações na vida real que ilustram os diversos usos do cálculo;
- desenvolver habilidades básicas para continuar o aprendizado do Cálculo Integral.

Conteúdo programático: A disciplina está focada em três unidades essenciais:

a. Funções Limites e Continuidade. Definições.
b. Derivadas.
c. Aplicação das derivadas.

Diretrizes gerais para a condução da disciplina

A disciplina terá dois momentos bem específicos: um presencial e outro a distância. Nos dois momentos serão abordados conteúdos básicos, funções e equações paramétricas que são as principais ferramentas para descrever o mundo real em termos matemáticos. Apresentaremos conjuntos abrangentes de exercícios contendo ampla variedade de problemas para construção de habilidades, aplicações e investigações que desenvolvem o pensamento crítico.

A tecnologia será usada ou sugerida todo o tempo, tanto como uma ferramenta para resolver problemas quanto de forma investigativa.

UNIDADE A

FUNÇÕES, LIMITES E CONTINUIDADE

1. DEFINIÇÃO DE FUNÇÃO, DOMÍNIO, CONTRADOMÍNIO E IMAGEM

1.1. FUNÇÃO

Uma relação estabelecida entre dois conjuntos X e Y é um conjunto de pares ordenados, cada um da forma (x, y), em que x é um elemento do primeiro conjunto e y é um elemento do segundo. Ex.: $\{(1,1),(1,-1),(-1,-1),(-1,1)\}$, $x^2+y^2=16$, $y=2x+3$.

Já uma função de X em Y é uma relação entre estes conjuntos que tem a propriedade de que todos os pares ordenados com o mesmo valor de x tenham também o mesmo valor de y. A variável x é a variável independente e a variável y é a variável dependente. Desse modo, as funções são entes matemáticos que descrevem relações especiais entre determinados objetos. Na definição acima, x é denominado argumento ou domínio da função e $y=f(x)$ (ou seja, y depende de x) é a imagem de x segundo a função f, esta por sua vez compõe uma parte de um conjunto maior que chamamos contradomínio. Observe com atenção o esquema abaixo:

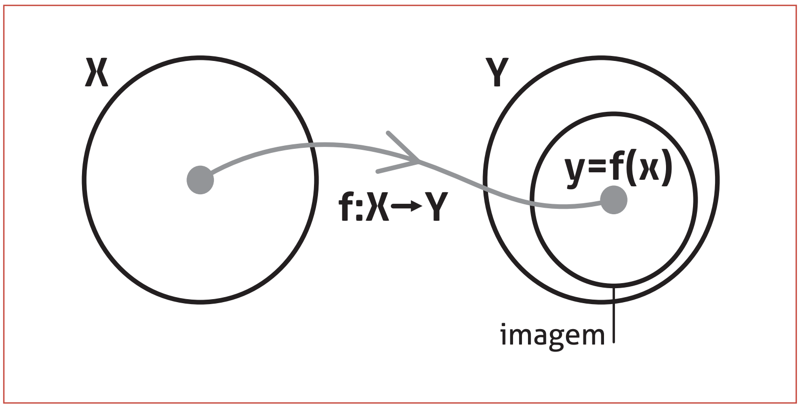


Figura A.1: Esquema ilustrativo do conceito de função.

Em diversos momentos do nosso dia-a-dia, deparamo-nos com situações reais em que usamos funções para modelar ou estimar o comportamento de uma determinada grandeza, seja em um caso simples, como no cálculo do volume de uma esfera, $V=f(r)=\frac{4\pi}{3}r^3$, ou no cálculo do montante de uma dívida em um banco após n meses devendo R$900,00 no limite do cheque especial, $M = f(n) = 900,00 \times (1+i)^n$, onde i é uma taxa constante, geralmente da ordem de 10% ao mês ($i \cong 0.10$).

Intuitivamente, podemos pensar em uma função como uma regra usada para associar a cada valor do argumento x um único valor $f(x)$ pertencente a um dado conjunto. Esta "regra" pode ser especificada através de um gráfico no plano cartesiano, uma tabela de correspondência, um conjunto de pares de elementos, diagramas de setas entre dois conjuntos ou, como geralmente ocorre, através de símbolos matemáticos. Neste último caso, nos deparamos com uma expressão do tipo

$$\begin{aligned} &f : A \to B \\ &x \mapsto 3x+2 \end{aligned},$$

onde A é o domínio de f, B é contradomínio de f e a imagem é o conjunto de pontos dados pela expressão $y = 3x+2$, tais que $x \in A$.

Os conceitos acima apresentados podem ser generalizados para outros tipos de funções, as quais contenham não apenas uma variável independente, mas diversas. Vejamos alguns exemplos:

a. $z = f(x,y) = x + 2y$

b. $A_{cilindro} = g(h,r) = 2\pi r(h+r)$

c. $V_{caixa} = h(a,b,c) = abc$

Note que a função "área do cilindro" depende da altura e do raio. Já a função "volume da caixa" depende das respectivas medidas de base, largura e altura.

Veremos que nem sempre a função é apresentada na forma $y = f(x)$ como no exemplo anterior. Observando a forma com que a função é especificada, chamamos de **função explícita** aquela que se assemelha aos exemplos acima e de **função implícita** qualquer exemplar da forma

$$x^2y + 3x = 5,$$

a qual é uma forma de especificar a função

$$y = f(x) = \frac{5-3x}{x^2}, \text{ com } x \neq 0.$$

1.1.1. Definição formal

Sejam A e B dois conjuntos não vazios e f uma relação entre A e B que define um conjunto de pares pertencentes ao produto cartesiano $A \times B$. Dizemos que f é uma função de A em B se, e somente se, cada elemento x do conjunto A estiver associado a um único elemento do conjunto B. Nesse caso, escrevemos:

$f : A \to B$ lê-se: f é função de A em B.

Nos casos em que é possível descrever a função explicitamente, temos:

$y = f(x)$, e lemos: y é função de x, com $x \in A$ e $y \in B$.

Assim, se uma relação f também é função, esta relação é *unívoca* e *total*, ou seja,

$$\begin{cases} b = f(a) \wedge c = f(a) \Rightarrow b = c \\ \forall x \in X, \exists y \in Y \mid y = f(x) \end{cases},$$

onde lemos "se $b = f(a)$ e $c = f(a)$ então b = c" e "para todo $x \in X$ existe $y \in Y$ tal que $y = f(x)$". Vamos fixar estes conceitos com quatro exemplos de diagramas de setas apresentados aos pares nas figuras A.2 e A.3.

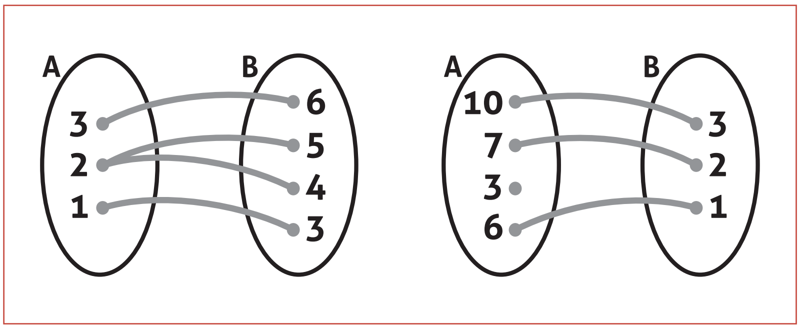


Figura A.2: Relação que não é unívoca (à esquerda) e relação que não é total (à direita). Conforme a definição 1.1.1, estes casos *não* são exemplos de função.

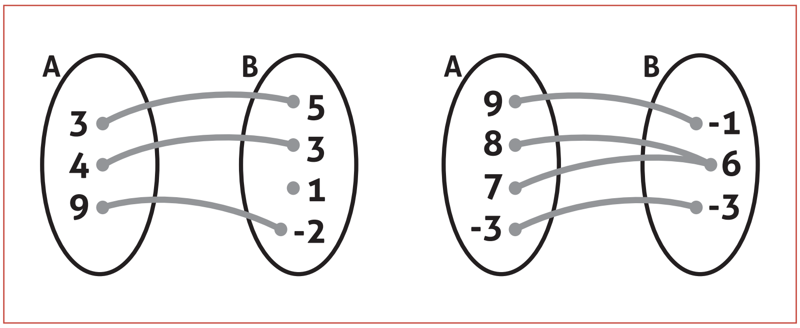


Figura A.3: Dois exemplos de funções. Note que, na figura à esquerda, não há elementos de A com a mesma imagem e, na figura à direita, a imagem é igual ao contradomínio. Esses dois exemplos representam tipos especiais de funções, particularmente importantes em álgebra.

1.2. DOMÍNIO, CONTRADOMÍNIO E IMAGEM

A definição de uma função está sempre associada a determinados conjuntos, os quais recebem denominações especiais. O domínio é o conjunto que contém todos os elementos (e somente estes!) para os quais a função está definida. O contradomínio é o conjunto que contém os elementos que podem ser relacionados a elementos do domínio. Já o conjunto formado por todos os elementos do contradomínio que são correspondentes a algum elemento do domínio é chamado de imagem da função f.

NOTAÇÃO
Considerando uma função $f: A \to B$, temos:
$D(f) = A$ $\therefore$ "o domínio de f é igual ao conjunto A"
$CD(f) = B$ $\therefore$ "o contradomínio de f é igual ao conjunto B"
$Im(f) \subset B$ $\therefore$ "o conjunto imagem de f *está contido* no contradomínio B"

Informalmente, podemos dizer que o conjunto imagem é o conjunto de valores que efetivamente são assumidos por f(x). Desse modo, o conjunto imagem é um subconjunto do contradomínio. O leitor deve perceber que uma função é caracterizada pelo domínio, pelo contradomínio e por uma lei de associação ou lei de formação. Exemplo:

Uma função $f: \Re \to \Re,\ f(x) = 3x^4$ é diferente de uma função $f: \Re \to \Re^+,\ g(x) = 3x^4$. Embora as funções f e g tenham mesmo domínio e mesma lei de associação, o contradomínio de f é um conjunto "maior" que contém o conjunto $\Re^+$ e ainda outro conjunto de elementos não pertencentes a $\Re^+$.

1.3. FUNÇÕES INJETORAS, SOBREJETORAS E BIJETORAS

Alguns casos particulares de funções recebem denominações especiais por terem elevada importância no desenvolvimento da álgebra:

1.3.1. Funções injetoras

Funções injetoras (ou injetivas) são aquelas em que cada elemento da imagem está associado a apenas um elemento do domínio. Em poucas palavras, há uma relação um para um entre os elementos do domínio e da imagem. Isto é, se dois elementos do domínio são diferentes, então os elementos f(x) e f(y) do contradomínio também diferem entre si. Assim, a cardinalidade (número de elementos de um conjunto) do contradomínio é sempre maior ou igual a do domínio em uma função injetora. Ressalta-se, portanto, que pode haver mais elementos no contradomínio que no conjunto imagem da função. Exemplos:

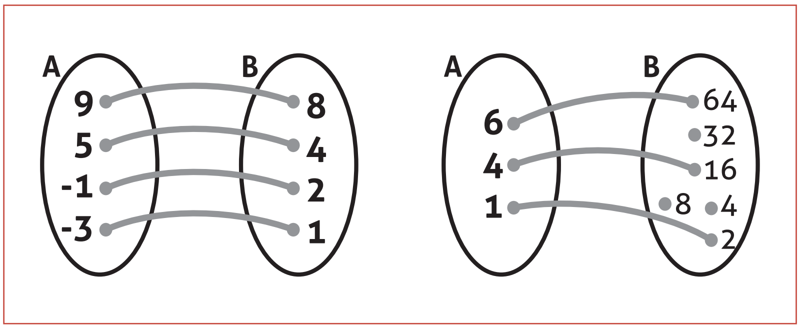


Figura A.4: Exemplos de funções injetoras. Note que podem ou não sobrar elementos não conectados no contradomínio.

1.3.2. Funções sobrejetoras

Funções sobrejetoras são aquelas em que todos os elementos do contradomínio estão associados a algum elemento do domínio. Em outras palavras, isso significa dizer que o conjunto imagem é igual ao conjunto contradomínio. Exemplos:

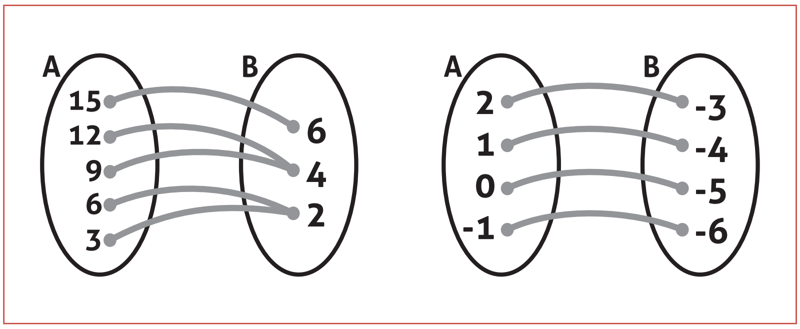


Figura A.5: Exemplos de funções sobrejetoras. Note que uma função sobrejetora pode *ou não* ser também injetora. Identifique esse caso neste exemplo.

1.3.3. Funções bijetoras

Dizemos que uma função é bijetora se ela for ao mesmo tempo sobrejetora e injetora, isto é, se todos os elementos do domínio estão associados a *todos* os elementos do contradomínio de forma *um para um* e exclusiva. Exemplo:

Sejam os conjuntos $A = \{-3, -1, 2, 4\}$ e $B = \{-1, 3, 9, 13\}$ e a função $f: A \to B$ definida pela lei de formação $y = 2x + 5$ para $x \in A$ e $y \in B$. Verifique no esquema ao lado que esta função é bijetora.

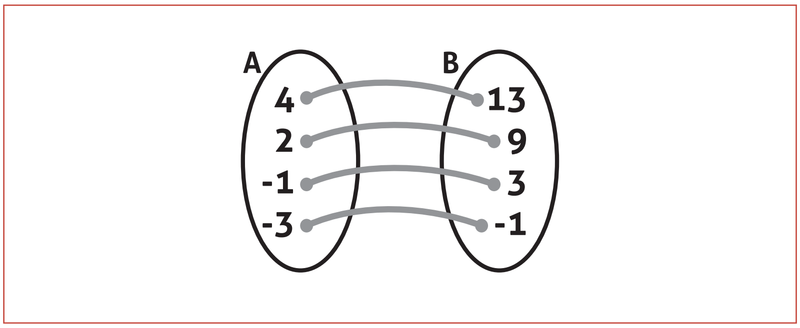


Figura A.6: Exemplo de função bijetora.

1.4. REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DE FUNÇÕES

Gráfico de uma função é o conjunto de pontos coordenados $(x, f(x))$, onde $x \in A$ e $f(x) \in B$, sendo f uma função definida como $f : A \to B$. Assim, o gráfico de uma função $f : A \to B$ é um subconjunto do produto cartesiano de A por B ($A \times B$).

Traçados de gráficos:
O gráfico de uma função y = f(x) consiste de todos os pontos (x, f(x)), onde x está no domínio de f. Observe na Figura A.7 que:

- x é distância direcionada do eixo y e,
- f(x) é distância direcionada do eixo x.

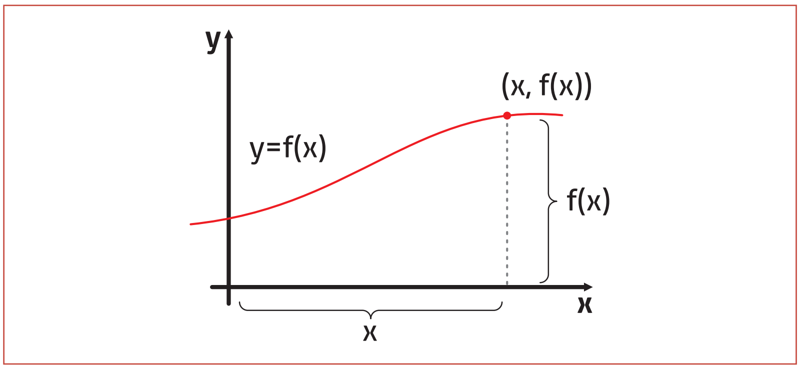


Figura A.7: Representação gráfica de funções.

Uma reta vertical pode interceptar o gráfico de uma função de x no máximo uma vez. Essa observação possibilita um conveniente teste visual, chamado de teste da vertical, para funções de x. Isto é, um gráfico no plano coordenado é um gráfico de uma função f se, e somente se, nenhuma reta vertical intercepta o gráfico em mais de um ponto. Por exemplo, na figura (a), você pode ver que o gráfico não define y como uma função de x, pois uma reta vertical intercepta o gráfico duas vezes, enquanto que na figura (b) e (c), o gráfico realmente define y como função de x.

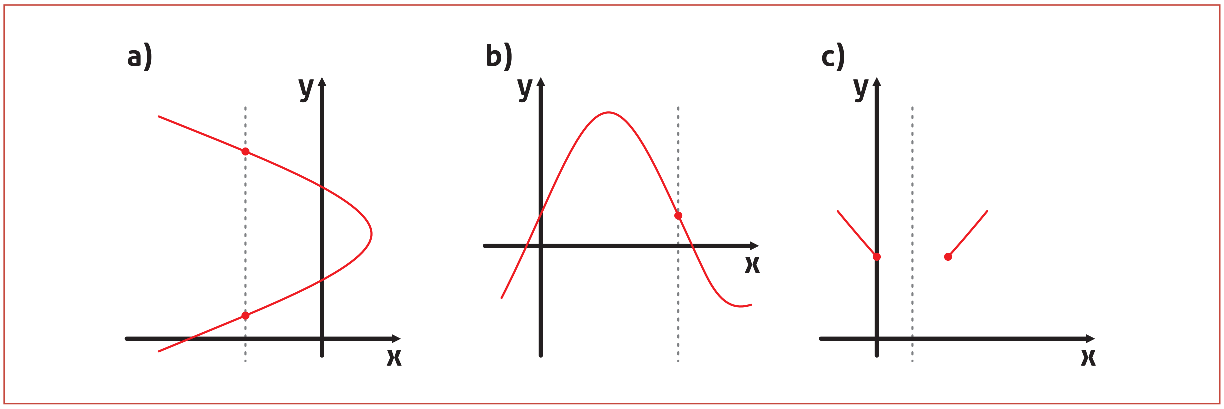


Figura A.8: Exemplos de aplicação do teste da vertical. O gráfico (a) não representa nenhuma função $y = f(x)$.

Vamos ver agora um exemplo simples, mas não menos importante, da teoria de funções, a função identidade:

$$y = f(x) = x$$

X	Y
-5	-5
-4	-4
-3	-3
-2	-2
-1	-1
0	0
1	1
2	2
3	3
4	4
5	5

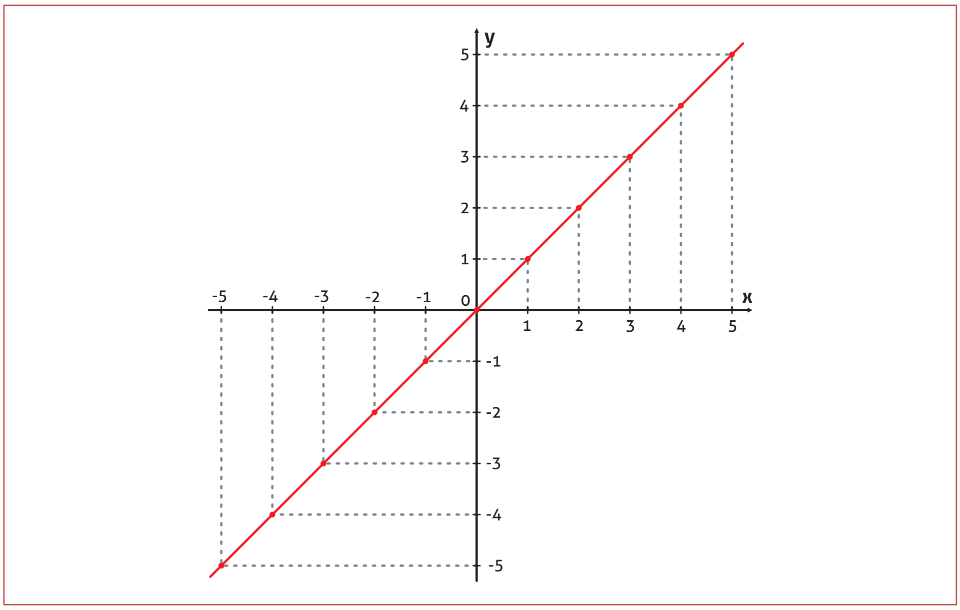


Figura A.9: Gráfico da função identidade.

1.5. TAXAS DE VARIAÇÃO

O coeficiente angular de uma reta pode ser interpretado como razão ou como taxa de variação. Se os eixos x e y têm a mesma unidade de medida, o coeficiente angular é adimensional (não tem unidade). Se o eixo x e o eixo y têm diferentes unidades de medida, o coeficiente angular é uma taxa de variação. Em seu estudo do cálculo, você encontrará aplicações envolvendo essas e outras interpretações da inclinação.

O coeficiente angular de uma reta não vertical é dado pela medida do número de unidades que a reta sobe (ou desce) verticalmente para cada unidade de deslocamento horizontal da esquerda para a direita. Vamos analisar esquematicamente.

Considere os dois pontos (x_1, y_1) e (x_2, y_2) de uma reta qualquer, semelhante a que é apresentada na Figura A.10. Conforme você se desloca da esquerda para a direita ao longo dessa reta, uma variação vertical de $\Delta y = y_2 - y_1$ unidades corresponde a uma variação horizontal de $\Delta x = x_2 - x_1$ unidades. A letra grega delta, que aqui aparece em maiúscula, é o símbolo Δ e as grandezas acima devem ser lidas como "delta y" e "delta x".

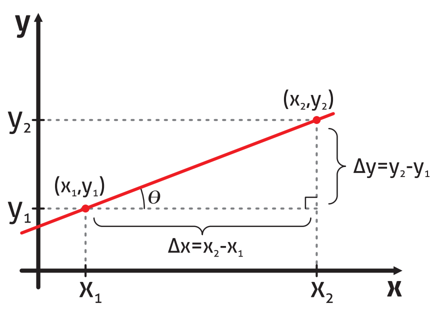


Figura A.10: Esquema explicativo da determinação da inclinação de uma reta não vertical qualquer.

O coeficiente angular m de uma reta não vertical que passa por (x_1, y_1) e (x_2, y_2) é simplesmente a tangente do ângulo θ medido entre essa reta e uma reta qualquer paralela ao eixo x

$$m = \operatorname{tg}\theta = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \text{ com } x_1 \neq x_2 .$$

Como vemos, o coeficiente angular não é definido para retas verticais, pois nesse caso teríamos $x_1 = x_2$.

1.6. CONCEITO E PROPRIEDADES DE LIMITES

1.6.1. Noção intuitiva de limite

Vamos iniciar o nosso estudo de limites analisando dois casos simples de funções e em seguida vamos introduzir um terceiro caso que apresenta um ponto não incluído no domínio. As funções $f(x) = x + 2$ e $g(x) = x^2 - 4$ estão representadas respectivamente pelos gráficos a) e b) da Figura A.11.

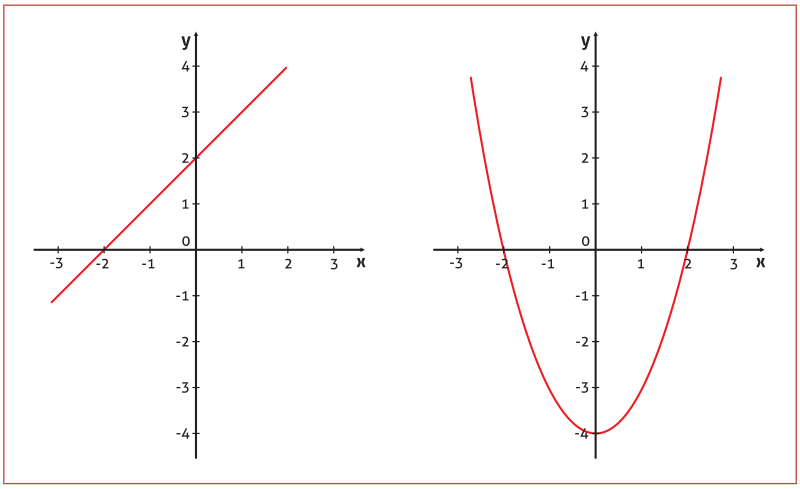


Figura A.11: Gráficos de duas funções de domínio igual ao conjunto dos números reais $\Re$.

Essas funções estão definidas para todo $x \in \Re$, ou seja, qualquer que seja o número real a, os valores $f(a)$ e $g(a)$ estão bem definidos no contradomínio $\Re$.

Agora, vamos analisar uma terceira função:

$$h(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$$

O domínio da função $h(x)$ não é $\Re$, pois, fazendo $x = 2$ encontramos

$$h(2) = \frac{2^2 - 4}{2 - 2} = \left(\frac{0}{0}\right),$$

onde $\left(\frac{0}{0}\right)$ **NÃO É UM NÚMERO** e sim um símbolo que representa uma **INDETERMINAÇÃO** matemática. Logo, o domínio de $h(x)$ é $D(h) = \Re - \{1\}$. Isso significa que não é possível estabelecer uma imagem $f(x)$ para $x = 1$.

ATENÇÃO

Esse tipo de indeterminação e outros tipos serão comumente tratados no decorrer deste texto.

Entretanto, se desejarmos investigar o comportamento do gráfico da função $h(x)$, quando x assume valores muito próximos, embora diferentes de 2, como devemos proceder? Esse é justamente foco do estudo de limites de funções: procurar estabelecer o comportamento de uma função na vizinhança de um determinado ponto pertencente ou não ao seu domínio. Nos casos de pontos que não pertencem ao domínio, aos quais chamamos de *singularidades*, fazemos uso de tabelas de aproximações.

Nos dos primeiros exemplos, as funções $f(x)$ e $g(x)$ não apresentam quaisquer singularidades, de modo que não é necessário o uso de tabelas para avaliar seu comportamento nas proximidades de nenhum ponto (verifique isso na A.11). No entanto, na função

$h(x)$ temos uma indeterminação em $x = 2$, cuja análise será feita com ajuda das tabelas A.1 e A.2 e da Figura A.12.

x	h(x)
1	3
1.5	3.5
1.75	3.75
1.9	3.9
1.99	3.99
1.999	3.999
1.9999	3.9999
1.99999	3.99999
1.999999	3.999999

Tabela A.1

x	h(x)
3	5
2.5	4.5
2.25	4.25
2.1	4.1
2.01	4.01
2.001	4.001
2.0001	4.0001
2.00001	4.00001
2.000001	4.000001

Tabela A.2

A Tabela A.1 mostra o comportamento da função $h(x)$ quando nos aproximamos do ponto $x = 2$ pela esquerda (os valores são cada vez mais próximos de 2, porém sempre menores que 2). Note-se que, quanto mais próximo de 2 for o valor de x, o valor de $h(x)$ mais se aproxima a 4 unidades. Da mesma forma, conforme vemos na Tabela A.2, quando x se aproxima de 2 pela direita (valores sucessivamente próximos de 2, porém sempre maiores), $h(x)$ também *tende* para 4 unidades.

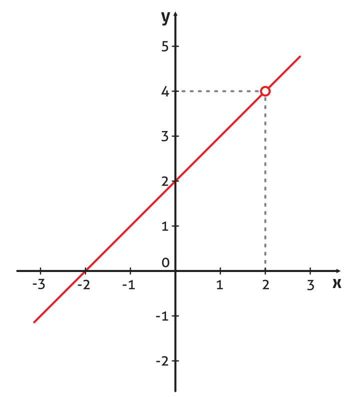


Figura A.12: Gráfico da função $h(x)=\dfrac{x^2-4}{x-2}$. Observe que embora a função não esteja definida em $x=2$, seu comportamento não parece mudar nas vizinhanças deste ponto.

O leitor já deve ter notado que podemos encontrar valores de $h(x)$ tão próximos de $h(x)=4$ quanto desejarmos ou tivermos precisão em nossa calculadora. Nesse caso, dizemos que "o limite de $h(x)$ quando x tende a (se aproxima de) 2 é igual a 4" e escrevemos:

$$\lim_{x\to 2} h(x) = \lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2} = 4$$

Cada uma das aproximações listadas nas tabelas desse exemplo recebe uma denominação especial, são os chamados limites laterais. Na Tabela A.1, dizemos que "x tende a 2 pela esquerda" e denominamos **limite lateral à esquerda**. No outro caso, analisamos quando "x tende a 2 pela direita" e chamamos **limite lateral à direita**. Notação:

$$\lim_{x\to 2^-} h(x) = \lim_{x\to 2^-}\frac{x^2-4}{x-2} = 4 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 2^+} h(x) = \lim_{x\to 2^+}\frac{x^2-4}{x-2} = 4$$

ATENÇÃO

O sinal negativo em 2^- indica que x se aproxima de 2 através de valores sempre menores que 2 (x tende a 2 pela esquerda). Da mesma forma, a notação 2^+ indica o cálculo do limite lateral à direita.

IMPORTANTE

Se os cálculos dos limites laterais à esquerda e à direita retornarem valores diferentes, ou seja, se uma dada função $f(x)$ tender lateralmente para pontos diferentes, à medida que nos aproximamos de um determinado ponto de abscissa $x=a$, dizemos que o limite não existe nesse ponto e escrevemos:

$$\lim_{x\to a} f(x) \quad \textit{não existe.}$$

Será necessário sempre construir tabelas de aproximações para determinar o limite de uma função, caso ele exista?

Não! Há uma forma bem mais simples, como veremos a seguir.

1.6.2. Avaliação de algumas indeterminações do tipo $\frac{0}{0}$

Na seção anterior, avaliamos o limite de uma função $h(x)$ em um ponto singular fora do seu domínio, através de sucessivas aproximações à esquerda e à direita do ponto. Esse processo é trabalhoso e difícil de implementar para algumas funções. Agora, aprenderemos uma técnica mais sofisticada para efetuar essa tarefa.

Quando uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$ aparece no cálculo do limite de funções da forma $f(x)=\frac{p(x)}{q(x)}$, sendo $p(x)$ e $q(x)$ dois polinômios quaisquer, nos deparamos com:

$$\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a}\frac{p(x)}{q(x)}=\left(\frac{0}{0}\right)$$

Logo, $p(a)=0$ e $q(a)=0$ e, portanto, $x_0=a$ é raiz desses dois polinômios. Desse modo, $p(x)$ e $q(x)$ podem ser escritos como o produto de dois outros polinômios, sendo um deles o polinômio $(x-a)$ e, assim, podemos efetuar uma simplificação:

$$\lim_{x\to a} f(x)=\underbrace{\lim_{x\to a}\frac{p(x)}{q(x)}}_{\left(\frac{0}{0}\right)}=\lim_{x\to a}\frac{(x-a)p'(x)}{(x-a)q'(x)}=\lim_{x\to a}\frac{p'(x)}{q'(x)}$$

Se $\lim_{x\to a}\frac{p'(x)}{q'(x)}=\left(\frac{0}{0}\right)$, repetimos o procedimento quantas vezes forem necessárias até que isso não ocorra.

ATENÇÃO
Só podemos efetuar a simplificação, porque, embora $x\to a$, x é diferente de a.

COMO ENCONTRAR OS POLINÔMIOS $p'(x)$ e $q'(x)$:
Os polinômios $p'(x)$ e $q'(x)$ são encontrados por fatoração do polinômio original. Para isso, basta utilizar o método tradicional de divisão de polinômios ou o dispositivo prático de Briot-Ruffini para dividir os polinômios $p(x)$ e $q(x)$ por $(x-a)$.

Exemplo 1
Use a simplificação para reavaliar o limite $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}$:

Solução
Tentando uma substituição direta, encontramos:

$$h(x)=\frac{x^2-4}{x-2}=\frac{2^2-4}{2-2}=\left(\frac{0}{0}\right)$$

Logo, $x_0=2$ é raiz de $p(x)=x^2-4$ e $q(x)=x-2$. Assim, reescrevemos o limite:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x+2)(x-2)}{(x-2)}=\lim_{x\to 2}(x+2)=(2+2)=4$$

Repetindo o resultado obtido anteriormente.

Exemplo 2
Calcule $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2-9}{x^2-x+6}$:

Solução

$$\lim_{x\to -3}\underbrace{\frac{x^2-9}{x^2+x-6}}_{\left(\frac{0}{0}\right)}=\lim_{x\to -3}\frac{(x+3)(x-3)}{(x-2)(x+3)}=\lim_{x\to -3}\frac{(x-3)}{(x-2)}=\frac{-3-3}{-3-2}=\frac{-6}{-5}=\frac{6}{5}$$

1.6.3. Definição formal

Seja f é uma função definida em algum intervalo aberto contendo a, exceto possivelmente no próprio a, dizemos que o limite de $f(x)$, quando x tende a $x_0=a$, é L e escrevemos

$$\lim_{x\to a}f(x)=L$$

se, e somente se, os limites laterais à esquerda e à direita existem e são iguais à L, isto é,

$$\lim_{x\to a^-}f(x)=\lim_{x\to a^+}f(x)=L$$

Caso contrário, dizemos que o limite não existe.

TEOREMA DA UNICIDADE

Se $\lim\limits_{x\to a}f(x)=L_1$ e $\lim\limits_{x\to a}f(x)=L_2$, então $L_1 = L_2$.

Esse resultado é muito importante, pois, se encontrarmos um certo valor L para o limite de uma função f em um determinado ponto com $x=a$, então L é o limite de f em a.

1.6.4. Propriedades

Seja $k\in\Re$ e sejam $\lim\limits_{x\to a}f(x)=L$ e $\lim\limits_{x\to a}g(x)=M$, onde L e M são dois números reais quaisquer, então:

a. $\lim\limits_{x\to a}k=k$

b. $\lim\limits_{x\to a}\left[f(x)\pm g(x)\right]=\lim\limits_{x\to a}f(x)\pm\lim\limits_{x\to a}g(x)=L\pm M$

c. $\lim\limits_{x\to a}k\cdot f(x)=k\cdot\lim\limits_{x\to a}f(x)=k\cdot L$

d. $\lim\limits_{x\to a}\left[f(x)\cdot g(x)\right]=\lim\limits_{x\to a}f(x)\cdot\lim\limits_{x\to a}g(x)=L\cdot M$

e. $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim_{x\to a}f(x)}{\lim_{x\to a}g(x)}=\frac{L}{M}$, com $M\neq 0$

f. $\lim_{x\to a}\left[f(x)\right]^n=L^n$ e $\lim_{x\to a}\sqrt[n]{f(x)}=L^n$

Exemplo

Vamos resolver o limite $\lim_{x\to -1}\sqrt{\frac{9x^2+18}{7-3x}}$ aplicando a maior parte das propriedades listadas.

Solução

$$\lim_{x\to -1}\sqrt{\frac{9x^2+18}{7-3x}}=3\cdot\lim_{x\to -1}\sqrt{\frac{x^2+2}{7-3x}}=3\cdot\frac{\lim_{x\to -1}\sqrt{x^2+2}}{\lim_{x\to -1}\sqrt{7-3x}}=3\cdot\frac{\sqrt{\lim_{x\to -1}(x^2+2)}}{\sqrt{\lim_{x\to -1}(7-3x)}}=3\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{10}}=3\frac{\sqrt{30}}{10}$$

ATENÇÃO

Obviamente, não é preciso fazer todos esses passos. Isto foi feito apenas como exemplo, esse mesmo exercício poderia ser feito em poucos passos, por substituição direta.

1.6.5. Limites envolvendo o infinito

Até esta seção, os limites discutidos envolviam funções que tendiam para uma constante real qualquer ou para algo como $\left(\frac{0}{0}\right)$ (já sabemos como resolver isso!). Nas ocasiões em que o sistema tende para algo do tipo $\frac{0}{K}$, $K\neq 0$, observamos, obviamente, apenas um caso particular do primeiro, $\frac{0}{K}=0=$ *constante real*. Porém, em ALGUMAS SITUAÇÕES, iremos trabalhar com funções que aumentam ou diminuem sem limitação quando a variável independente x começa a se aproximar cada vez mais de um determinado ponto fixo.

APLICAÇÃO PRÁTICA

Muitos dos sistemas físicos apresentam este tipo de singularidade. Saber avaliar corretamente o comportamento dos sistemas nesses pontos muitas vezes traz mais informações físicas que em outros pontos regulares do domínio.

Este é o caso de quando o cálculo do limite $\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}\frac{p(x)}{q(x)}$ tende para $\left(\frac{K}{0}\right)$, onde $K\neq 0$ é uma constante. Para analisar esse limite, vamos fazer uso da propriedade $\lim_{x\to a}k\cdot f(x)=k\cdot\lim_{x\to a}f(x)$ e perceber que os conceitos analisados no caso particular $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}$ poderão ser facilmente generalizados.

MÃOS À OBRA!

Iniciamos construindo duas tabelas de aproximações A.3 e A4 para valores da função $f(x)=\frac{1}{x}$ à medida que x tende para zero pela direita e pela esquerda e, em seguida, observamos o gráfico da figura A.13a.

x	f(x)
1	1
0.5	2
0.25	4
0.1	10
0.01	100
0.001	1000
0.0001	10000
0.00001	100000
0.000001	1000000

Tabela A.3

x	f(x)
-1	-1
-0.5	-2
-0.25	-4
-0.1	-10
-0.01	-100
-0.001	-1000
-0.0001	-10000
-0.00001	-100000
-0.000001	-1000000

Tabela A.4

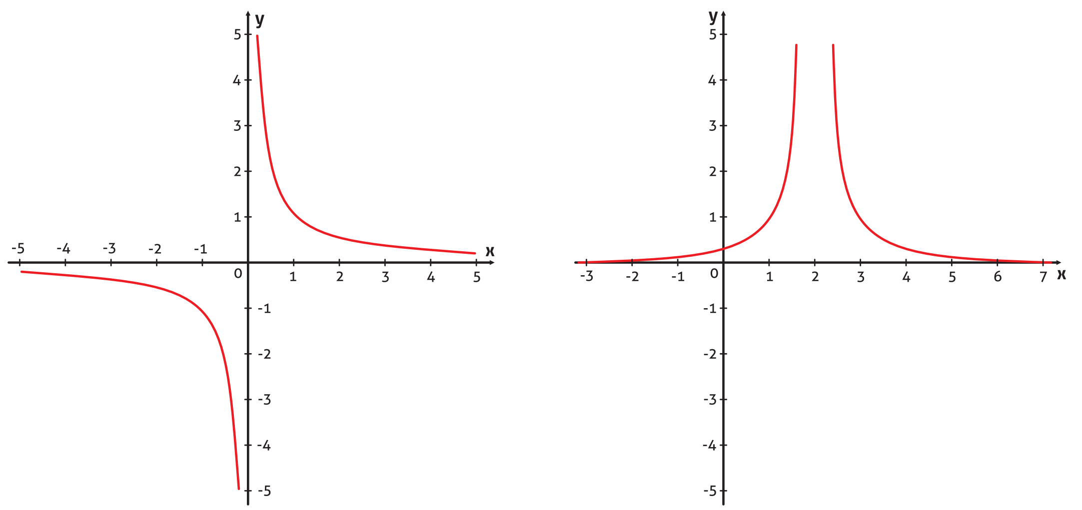


Figura A.13: Análise do comportamento de funções na vizinhança de pontos com limites infinitos.

Observe a Figura A.13a. Quanto mais x se aproxima de zero pela esquerda, mais o valor de $f(x)=\dfrac{1}{x}$ diminui de forma indefinida. Nesse caso, dizemos que o limite de $f(x)$, quando x tende a zero pela esquerda, decresce indefinidamente e escrevemos:

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x}=-\infty$$

Da mesma forma, quanto mais x se aproxima de zero por valores positivos, dizemos que o limite de $f(x)$, quando x tende a zero pela direita, cresce indefinidamente e escrevemos:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=+\infty$$

Note que, nesse caso, os limites laterais são distintos. Assim, para $K>0$, temos:

ATENÇÃO

1. Observe a notação de limites laterais já apresentada neste texto.
2. Novamente, $+\infty$ e $-\infty$ não são números, são apenas símbolos matemáticos usados para representar quantidades indefinidamente grandes e quantidades indefinidamente pequenas, respectivamente.

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{K}{x} = +\infty \quad e \quad \lim_{x\to 0^-} \frac{K}{x} = -\infty$$

É claro que, se $K < 0$, trocam-se os sinais dos "resultados".

Como um segundo exemplo, pense na função $g(x) = \dfrac{1}{(x-2)^2}$. Como seriam os limites laterais da função $g(x)$ quando x tende a 2?

Construa uma tabela de aproximações e confira sua análise na Figura A.13b.

Agora, pense na afirmação: *"E se fizermos* x *crescer ou decrescer indefinidamente...* $f(x)$ *também teria o mesmo comportamento? Será que isso depende da* $f(x)$ *que estamos analisando?"*

Desse assunto, trataremos na próxima seção.

1.6.6. Limites no infinito

Depois de analisar limites infinitos de funções em singularidades fora do respectivo domínio, nesta seção, estudaremos o comportamento de algumas funções quando a variável independente x cresce ou decresce indefinidamente. Representaremos, respectivamente, por $x \to +\infty$ e $x \to -\infty$.

Nessas situações, a função pode tender para um determinado valor constante ou apresentar limites infinitos, como na seção anterior.

VOCÊ VAI PRECISAR PENSAR ASSIM

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{K}{x} = 0$$

"Um número K dividido por um número muito grande é um número muito pequeno!"

$$\lim_{x\to+\infty} x^n = +\infty\,,\ n > 0$$

"Um número muito grande elevado em um expoente positivo continua muito grande!"

Exemplos

a. $\displaystyle \lim_{x\to+\infty}\left(5+\frac{13}{x}\right) = \underbrace{\lim_{x\to+\infty} 5}_{5} + \underbrace{\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{13}{x}\right)}_{0} = 5+0 = 5$

b. $\displaystyle \lim_{x\to+\infty}\left(5x+\frac{13}{x}\right) = \underbrace{\lim_{x\to+\infty} 5x}_{+\infty} + \underbrace{\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{13}{x}\right)}_{0} = +\infty$

c. $\displaystyle \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{5}{x^6}-13x^3\right) = \underbrace{\lim_{x\to-\infty} \frac{5}{x^6}}_{0} - 13\underbrace{\lim_{x\to-\infty} x^3}_{-\infty} = -\infty$

ATENÇÃO

a. O produto de dois números muito grandes é um número muito grande.
b. O produto ou a soma de uma constante e um número muito grande também é um número muito grande.
c. As regras de sinais continuam valendo.

1.6.7. Expressões indeterminadas

Em uma das seções anteriores, encontramos uma forma de avaliar a indeterminação matemática $\frac{0}{0}$. Agora, estudando limites no infinito, seremos apresentados a uma série de outras indeterminações importantes no estudo do cálculo. Dentre as indeterminações $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty-\infty$, $0.\infty$, 1^{∞}, 0^0 e ∞^0, daremos atenção especial as quatro primeiras. Veremos quais habilidades para a fatoração de expressões e os conhecimentos até aqui discutidos serão fundamentais para a devida compreensão.

Exemplo 1

Indeterminação $\infty-\infty$

a. $\lim\limits_{x\to+\infty} 5\underbrace{x^4}_{+\infty}-\underbrace{x^3}_{+\infty} = \lim\limits_{x\to+\infty} 5x^4(1-\underbrace{\frac{1}{5x}}_{0}) = 5\cdot \underbrace{\lim\limits_{x\to+\infty} x^4}_{+\infty} = +\infty$

b. $\lim\limits_{x\to+\infty} 5x^2-x^3 = \lim\limits_{x\to+\infty} x^3\left(\underbrace{\frac{5}{x}}_{0}-1\right) = -1\cdot \underbrace{\lim\limits_{x\to+\infty} x^3}_{+\infty} = -\infty$

c. $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3-5x^2+x = \lim\limits_{x\to-\infty} x^3(1-\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}) = \lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$

ATENÇÃO

Note que limites que tendam para algo da forma $\infty-\infty$ podem resultar tanto em $+\infty$ como $-\infty$ (por isso, dizemos que $\infty-\infty$ é uma forma indeterminada).

Exemplo 2

Indeterminação $\frac{\infty}{\infty}$

a. $\lim\limits_{x\to+\infty} \underbrace{\frac{x^3+10}{7x^3-4x^2}}_{\frac{+\infty}{\pm\infty}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^3\left(1+\overbrace{\frac{10}{x^3}}^{0}\right)}{7x^3\left(1-\underbrace{\frac{4}{7x}}_{0}\right)} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^3}{7x^3} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{7} = \frac{1}{7}$

b. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^6}{3x^2+x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^6}{3x^2\left(1+\underbrace{\frac{1}{3x}}_{0}\right)} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^6}{3x^2} = \frac{1}{3}\cdot \underbrace{\lim\limits_{x\to+\infty} x^4}_{+\infty} = +\infty$

c. $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{4x^2-7}{3x^5} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{4x^2\left(1-\frac{7}{4x^2}\right)}{3x^5} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{4x^2}{3x^5} = \frac{4}{3}\cdot \underbrace{\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x^3}}_{0} = 0$

ATENÇÃO

Os limites do exemplo anterior evidenciam o porquê de chamarmos $\frac{\infty}{\infty}$ de indeterminação. Note que os três limites avaliados partiram de uma forma que gerava $\frac{\infty}{\infty}$ e nos conduziram a resultados diferentes.

Exemplo 3

Indeterminação $0 \times \infty$

a. $$\lim_{x \to +\infty} \underbrace{\left[\frac{(2-x)}{x^3}(x^2+1) \right]}_{0 \times (+\infty)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{(-x^3+2x^2-x+2)}{x^3} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^3\left(-1+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x^3}\right)}{x^3} = -1$$

b. $$\lim_{x \to +\infty} \underbrace{\left[\frac{5}{\sqrt{x-2}}(x^2-2) \right]}_{0 \times (+\infty)} = 5 \cdot \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2\left(1-\frac{2}{x^2}\right)}{\sqrt{x} \cdot \sqrt{1-\frac{2}{x}}} = 5 \cdot \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{\sqrt{x}} = 5 \cdot \lim_{x \to +\infty} x^{\frac{3}{2}} = +\infty$$

Note que, em ambos os casos, transformamos indeterminações $0 \times \infty$ em outras do tipo $\frac{\infty}{\infty}$, as quais já sabemos resolver. Para essa tarefa, artifícios como racionalização muitas vezes são úteis.

1.6.8. Uma aplicação importante de limites no infinito

Nesta seção, usaremos as habilidades desenvolvidas na determinação de limites no infinito para encontrar a solução de um problema importante que chamou a atenção dos matemáticos durante alguns séculos. É possível determinar com precisão a área sob a curva descrita por uma função contínua em um determinado intervalo $[a,b]$? A seguir, resolveremos um problema clássico, a área sob a curva descrita pela parábola $f(x)=x^2$ no intervalo [0, 1]. Para isso, vamos aplicar o método conhecido como Soma de Riemann, em que se divide a área sob a curva em n retângulos de mesma base $\left(\frac{b-a}{n}\right)$, calcula-se a soma das áreas de todos esses retângulos como uma função de n e faz-se n muito grande, isto é, faz $n \to +\infty$.

Observe a Figura A.14a. Nosso objetivo é calcular a área em destaque. Agora, veja a esquematização na Figura A.14b. Como o intervalo é de 1 unidade, todos os retângulos têm base de largura $\frac{1}{n}$, mas, a altura depende da posição do retângulo, já que a altura é um número $y=f(x)=x^2$. O retângulo 1 tem altura $\frac{1^2}{n^2}$, o segundo retângulo tem altura $\frac{2^2}{n^2}$, um retângulo em uma posição i qualquer terá altura $\frac{i^2}{n^2}$, com i entre 1 e n.

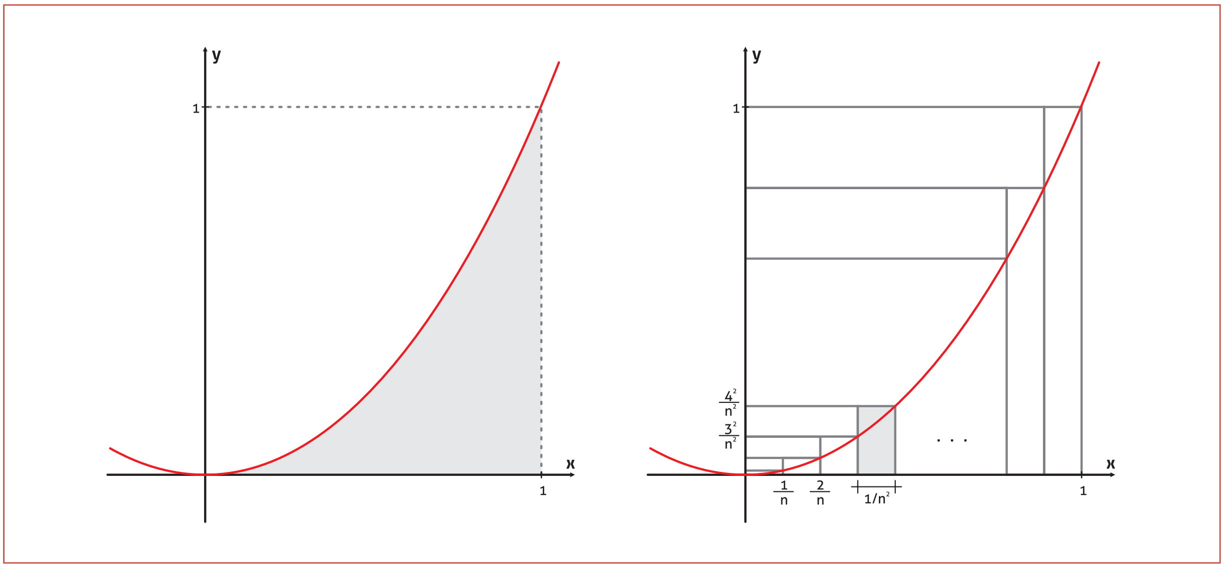


Figura A.14: Esquema utilizado para calcular a área sobre uma curva $y = x^2$.

Vamos calcular algumas dessas áreas:

$$A_1 = \text{base} \times \text{altura} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1^2}{n^2}, \quad A_2 = \frac{1}{n} \cdot \frac{2^2}{n^2}, \quad A_i = \frac{1}{n} \cdot \frac{i^2}{n^2}, \quad A_n = \frac{1}{n} \cdot \frac{n^2}{n^2} = \frac{1}{n}.$$

A soma das n áreas nos dá uma aproximação para o valor real que estamos procurando:

$$S(n) = \sum_{i=1}^{n} A_i = \frac{1}{n}\left(\frac{1^2}{n^2} + \frac{2^2}{n^2} + \cdots + \frac{i^2}{n^2} + \cdots + \frac{n^2}{n^2}\right) = \frac{1}{n}\left(\frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots n^2}{n^2}\right)$$

A soma $1^2 + 2^2 + \cdots + i^2 + \cdots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ é conhecida, de modo que:

$$S(n) = \frac{1}{n}\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^2}\right] = \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}.$$

No limite em que $n \to +\infty$, a área calculada em excesso tende a zero e a soma tende para o valor exato da área sob a curva:

$$\lim_{n\to+\infty} S(n) = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(2n^2 + 3n + 1)}{6n^2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2n^2\left(1 + \frac{3}{2n} + \frac{1}{2n^2}\right)}{6n^2} = \frac{1}{3}$$

Em outra unidade, veremos uma forma mais simples e mais abrangente de calcular essas áreas, cujas bases são fundamentadas no que acabamos de aprender.

1.7. DOIS LIMITES FUNDAMENTAIS

1.7.1. A base *e*

O **número *e*** foi apresentado pela primeira vez em 1618 pelo matemático Inglês Jonh Napier, não explicitamente e menos ainda com a notação que estamos acostumados, mais sim como a base utilizada para o cálculo de uma tabela de logaritmos. A notação *e* é uma homenagem ao matemático suíço Leonhard Euler.

Não apenas na matemática, mas em diversos ramos da ciência, o número *e* é a *base natural* utilizada para a descrição de fenômenos naturais como crescimento de populações (tanto de pessoas como de animais), decaimento radiativo, física do calor, circuitos elétricos, etc. Desse modo, a função exponencial e^x e o logaritmo natural $\ln x$ estão entre as funções de maior importância na matemática, mesmo sendo o número *e* um número racional e transcendente (não é raiz de nenhum polinômio de coeficientes reais).

Calcular o valor de *e* ($e \cong 2{,}718\,281\,828$) não é o enfoque desse curso. Contudo, identificar a igualdade $\lim\limits_{x \to \pm\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = e$ faz parte da estratégia de resolução de muitos problemas.

SAIBA MAIS

Faça $x = 10, 10^2, 10^3, 10^4, 10^5$ e construa uma tabela de aproximações. Em seguida, compare com o valor de *e* dado nesse texto ou com o valor dado por uma calculadora científica.

Exemplos:

a. $\lim\limits_{x \to +\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{-7x} = \left[\lim\limits_{x \to +\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x\right]^{-7} = e^{-7}$

b. $\underbrace{\lim\limits_{x \to -\infty}\left(1-\dfrac{5}{2x}\right)^x = \lim\limits_{u \to +\infty}\left(1-\dfrac{1}{-u}\right)^{-\frac{5u}{2}}} = \left[\lim\limits_{u \to +\infty}\left(1+\dfrac{1}{u}\right)^u\right]^{-\frac{5}{2}} = e^{-\frac{5}{2}}$

Note que, nos dois casos, uma substituição direta leva à indeterminação 1^∞. Para resolver a letra b, introduzimos um artifício chamado mudança de variável ao fazer convenientemente $x = -\dfrac{5u}{2}$ (por que achamos que assim resolveríamos). Como x e u tem sinais opostos, mudamos o sinal do limite $-\infty \mapsto +\infty$. Se a mudança escolhida não levar a uma solução, analise novamente o problema e tente outra.

1.7.2. O limite $\lim\limits_{x \to 0}\dfrac{\operatorname{sen}(x)}{x} = 1$

O limite fundamental trigonométrico recai novamente na forma indeterminada $\dfrac{0}{0}$. A demonstração deste resultado é longa e novamente foge do enfoque deste curso. Porém, com poucos pontos em uma tabela de aproximações já podemos fazer uma conjectura (idéia não comprovada, hipótese) sobre o valor de $\lim_{x\to 0}\frac{\text{sen}(x)}{x}$. Observe a tabela A.5.

x	$f(x)=\frac{\text{sen}(x)}{x}$
0,5	0,958851077
0,25	0,989615837
0,1	0,9983341664683
10^{-2}	0,9999833334167
10^{-3}	0,9999998333333
10^{-4}	0,9999999983333
10^{-5}	0,9999999999833
10^{-10}	0,9999999999999

Tabela A.5

Note que o limite lateral à esquerda é o mesmo, pois trocando x por $-x$ na função $f(x)=\frac{\text{sen}(x)}{x}$ obtemos:

$$f(-x)=\frac{\text{sen}(-x)}{-x}=\frac{-\text{sen}(x)}{-x}=\frac{\text{sen}(x)}{x}=f(x)$$

Assim, $\lim_{x\to 0^-}\frac{\text{sen}(x)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\text{sen}(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\text{sen}(x)}{x}=1$.

SAIBA MAIS

Funções com a propriedade $f(-x)=f(x)$ são chamadas funções pares. Já as funções com a propriedade $f(-x)=-f(x)$ são denominadas funções ímpares.

Exemplos:

a. $\lim_{x\to 0}\frac{\text{sen}(5x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{5}{5}\frac{\text{sen}(5x)}{x}=5\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\text{sen}(5x)}{5x}=5\cdot\underbrace{\lim_{u\to 0}\frac{\text{sen}(u)}{u}}_{1}=5$

Atenção
Aqui, novamente, usamos a troca de variáveis. Fazendo $5x=u$, quando $x\to 0$, $u\to 0$ e a expressão recai no limite fundamental trigonométrico.

b. $\lim_{x\to 0}\frac{\text{sen}(7x)}{\text{sen}(6x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{7x}{7x}\text{sen}(7x)}{\frac{6x}{6x}\text{sen}(6x)}=\lim_{x\to 0}\frac{7x\frac{\text{sen}(7x)}{7x}}{6x\frac{\text{sen}(6x)}{6x}}=\frac{7}{6}\cdot\frac{\overbrace{\lim_{x\to 0}\frac{\text{sen}(7x)}{7x}}^{1}}{\underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{\text{sen}(6x)}{6x}}_{1}}=\frac{7}{6}$

Atenção
Você notou? Aqui usamos a generalização do resultado alcançado no exercício anterior: $\lim_{x\to 0}\frac{\text{sen}(kx)}{kx}=\lim_{u\to 0}\frac{\text{sen}(u)}{u}=1$. A partir de agora, isso será usado de forma direta, sem grifo.

c. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\tan(x)}{x}\right)^2=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan^2(x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}\dfrac{\text{sen}^2(x)}{\cos^2(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\text{sen}^2(x)}{x^2}\dfrac{1}{\cos^2(x)}$

$$=\lim_{x\to 0}\left[\left(\frac{\text{sen}(x)}{x}\right)^2\frac{1}{\cos^2(x)}\right]=\underbrace{\left(\lim_{x\to 0}\frac{\text{sen}(x)}{x}\right)^2}_{1}\cdot\underbrace{\left(\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos^2(x)}\right)}_{1}=1$$

Lembre que o limite de uma potência é igual à potência do limite (propriedade 1.6.4f).

d. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos(x)}{x}\cdot\dfrac{1+\cos(x)}{1+\cos(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^2(x)}{x\left(1+\cos(x)\right)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\text{sen}^2(x)}{x\left(1+\cos(x)\right)}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\text{sen}(x)}{x}\frac{\text{sen}(x)}{1+\cos(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\text{sen}(x)}{x}\cdot\underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{\text{sen}(x)}{1+\cos(x)}}_{\frac{0}{2}}=1.0=0$$

1.8. FUNÇÕES LIMITADAS

Vimos que algumas funções tendem para um valor constante quando x tende a zero ou quando se torna muito grande ($x\to\infty$). Nesta seção, apresentaremos brevemente um conceito de função cuja imagem é um intervalo fechado do conjunto $\Re$.

DEFINIÇÃO

Dizemos que uma função $f(x)$ é limitada, se existe uma constante $k\in\Re^*$, tal que $|f(x)|\le k$, para todo x pertencente ao domínio de f.

Exemplos: Verifique os gráficos na Figura A.14.

a. $f(x)=\text{sen}(2x)-2$ $\quad Im(f)=[-3,-1]$ (azul)

b. $g(x)=1+3\cos^2(2x)$ $\quad Im(f)=[1,4]$ (vermelho)

c. $h(x)=\dfrac{\text{sen}(5x)}{x}$ $\quad Im(f)=[-1,5]$ (verde)

d. $m(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ $\quad Im(f)=[-1,-1]$ (amarelo)

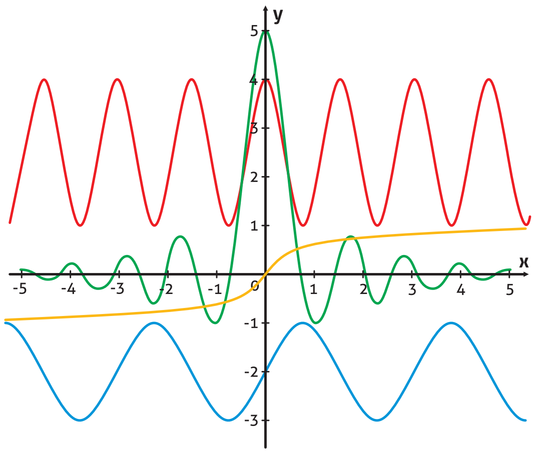


Figura A.15: Gráficos de funções limitadas

Da análise desses gráficos, vamos apresentar dois resultados importantes:

a. Se $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ e $g(x)$ é limitada, então $\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x) = 0$.

b. Se $\lim\limits_{x\to \pm\infty} f(x) = 0$ e $g(x)$ é limitada, então $\lim\limits_{x\to \pm\infty} f(x)g(x) = 0$.

VOCÊ DEVE PENSAR ASSIM:
Nas condições acima, $|g(x)| \le k$, com $k \in \Re$. Assim,

$$\lim_{x\to a} f(x)g(x) = \underbrace{\lim_{x\to a} f(x)}_{0} \cdot \underbrace{\lim_{x\to a} g(x)}_{\le k} = 0$$

Exemplos:

a. $$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{\text{sen}(4x)}{3x} = \frac{1}{3}\lim_{x\to\pm\infty} \underbrace{\frac{1}{x}}_{0}\underbrace{\text{sen}(4x)}_{|g(x)|\le 1} = \frac{1}{3}\cdot 0 = 0$$

b. $$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2} = \lim_{x\to\pm\infty} \underbrace{\frac{1}{x}}_{0}\cdot\underbrace{\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}}_{1} = 0\cdot 1 = 0$$

1.9. FUNÇÕES CONTÍNUAS

DEFINIÇÃO
Seja x_0 um ponto do domínio de uma função $f(x)$. Dizemos que *f* é contínua no ponto x_0 se, e somente se,

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0).$$

ATENÇÃO
Você deve ficar atento a três itens:
$f(x_0)$ existe?

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ existe (lembre dos limites laterais)?

E, finalmente, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$?

Exemplos:

a. A função $f(x) = 3x^2 - 1$. Essa função está definida para todo $x \in \Re$, logo $f(x_0)$ existe. Assim,

$$\lim_{x \to 5} f(x) = \lim_{x \to 5} 3x^2 - 1 = 74 = f(5)$$

Note que essa função é contínua em todo seu domínio $\Re$.

b. A função $f(x) = \begin{cases} 3 - x, x < 3 \\ \frac{1}{3}x - 1, x \geq 3 \end{cases}$ é contínua?

Solução

A única singularidade está em $x_0 = 3$, mas vemos que $f(3)$ está definida ($f(3) = 0$). Nos demais pontos, a função é a conhecida e "bem comportada" função do primeiro grau. Vamos calcular o limite:

$$\lim_{x \to 3^-} f(x) = \lim_{x \to 3^-} (3 - x) = 3 - 3 = 0$$

$$\lim_{x \to 3^+} f(x) = \lim_{x \to 3^+} (\frac{1}{3}x - 1) = \frac{1}{3}3 - 1 = 0$$

Logo, o limite existe e é igual a $\lim_{x \to 3} f(x) = 0$.

Como $\lim_{x \to 3} f(x) = 0 = f(3)$ e não há outros pontos a serem verificados, podemos afirmar que $f(x)$ é contínua em todo o seu domínio. Tente fazer o gráfico.

Contra-exemplo: Duas funções não contínuas.

A Figura A.16 ilustra dois exemplos de funções descontínuas.

A primeira é a função $f(x) = \frac{1}{x - 2}$. Note que nenhuma das condições é satisfeita. Por outro lado, a função $g(x) = \begin{cases} 3 + x, x \leq 1 \\ 2 - x, x > 1 \end{cases}$, à direita, é definida por partes e existe na singularidade $x_0 = 1$. Porém, os limites laterais à esquerda e à direita são diferentes, de modo que $\lim_{x \to 1} g(x)$ não existe.

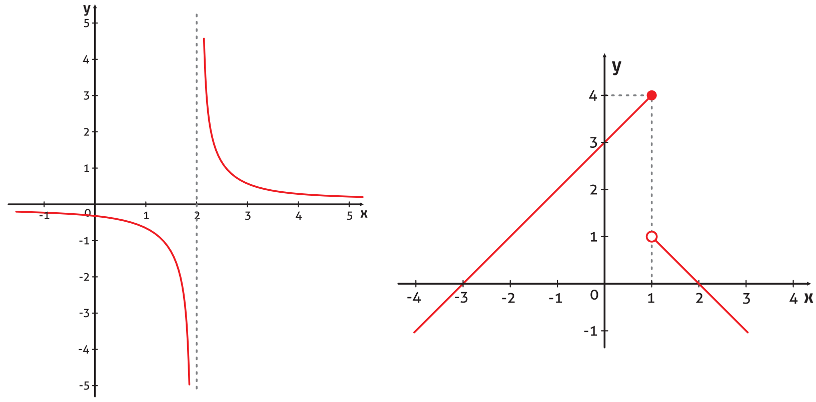


Figura A.16: Dois exemplos de funções descontínuas.

1.9.1. Propriedades das funções contínuas

Sejam $f(x)$ e $g(x)$ duas funções contínuas em um ponto $x = x_0$, então as seguintes propriedades podem ser verificadas:

a. $h(x) = f(x) \pm g(x)$ é contínua em $x = x_0$;

b. $h(x) = f(x) \cdot g(x)$ é contínua em $x = x_0$;

c. $h(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ é contínua em $x = x_0$.

1.10. RETAS TANGENTES

Nesta seção, estudaremos outra aplicação do cálculo de limites. Observe com atenção a sequência de imagens da figura A.17. Da esquerda para a direita, a reta *r* vai se aproximando da circunferência até tocá-la num ponto P.

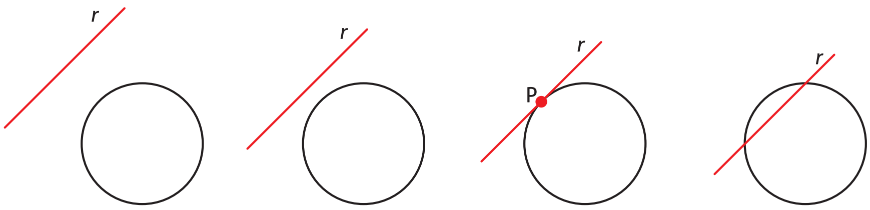


Figura A.17: Retas tangentes a uma circunferência.

Na terceira figura, dizemos que a reta *r* é tangente à circunferência no ponto P e, na quarta imagem, dizemos que a reta *r* é secante à circunferência.

Nesse exemplo, parece fácil encontrar a reta tangente em um ponto P, desde que ela exista. Porém, encontrar com precisão a equação exata da reta tangente que passa por P requer uma técni-

ATENÇÃO

Fique atento! A reta tangente toca (apenas toca!) a curva em P. Uma reta que corte a curva em P, NÃO é uma reta tangente.

ca matemática apropriada, a qual se utiliza dos conceitos de limites que você já conhece.

A seguir, vamos determinar, como exemplo, a equação da reta tangente à curva descrita pela função $y = f(x) = 4 - x^2$. A dedução será feita de maneira genérica, para uma função $y = f(x)$ qualquer, em uma curva contínua de um intervalo arbitrário.

Seja $y = f(x)$ uma curva contínua definida em um intervalo arbitrário (a,b). Estamos interessados em encontrar a reta tangente à curva no ponto $P = (x_0, y_0)$, onde $y_0 = f(x_0)$. Vamos tomar um outro ponto $Q = (x, y) \in (a,b)$ e traçar uma reta entre P e Q. Essa é uma reta secante à curva descrita por f.

Agora observe a Figura A.18. O coeficiente angular da reta secante s é $\tan\beta = \dfrac{y - y_0}{x - x_0}$. Movendo o ponto Q na direção de P, a reta secante se aproxima da reta tangente, de modo que o ângulo β se aproxima do ângulo α e, assim, $\tan\beta$ se aproxima de $\tan\alpha$.

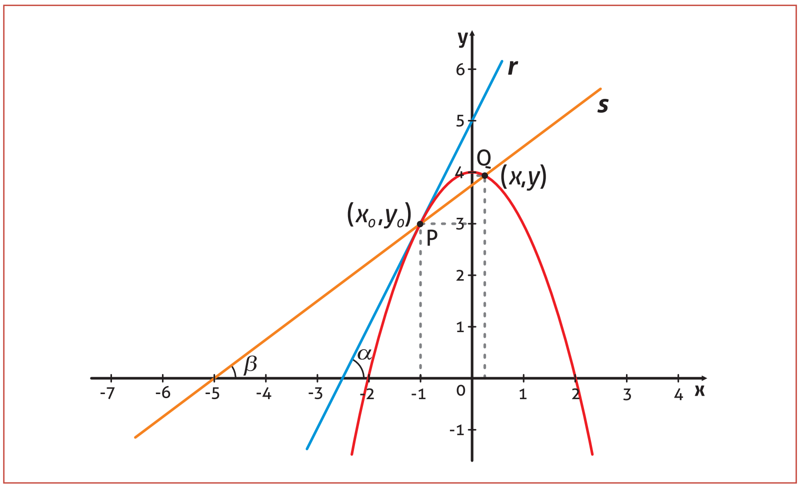


Figura A.18: Esquema ilustrativo da determinação de retas tangentes.

Usando o que aprendemos de limites, podemos perceber que $\lim\limits_{Q \to P} \tan\beta = \tan\alpha$.

Devemos expressar essa igualdade em termos das grandezas conhecidas, os pares ordenados (x, y) e (x_0, y_0). Para isso, é fundamental perceber que à medida que $Q \to P$, temos também $x \to x_0$, e, portanto:

$$\lim_{Q \to P} \tan\beta = \lim_{x \to x_0} \frac{y - y_0}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = tg(\alpha).$$

Agora, é preciso lembrar as funções do primeiro grau. A equação da reta tem a forma

$$y = m \cdot x + n,$$

onde m é o coeficiente angular e n é o coeficiente linear. Conhecendo m e n, ou conhecendo um destes e um ponto pertencente à reta, encontramos a sua equação. Mas $m = \tan\alpha$ e temos o ponto P, de forma que é conveniente reescrevê-la:

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

ATENÇÃO

Se esse limite der um resultado infinito, o ângulo $\alpha = 90^\circ$ e, portanto, a reta tangente é a vertical $x = x_0$.

Exemplo (vamos calcular a equação da reta r da Figura A.18)
Encontre a equação da reta tangente à curva $y = 4 - x^2$ no ponto de coordenada $x = -1$.

Solução
Iniciamos determinando o valor de y no ponto $x = -1$, ou seja, encontrando o par (x_0, y_0):

$$y_0 = f(x_0) = f(-1) = 4 - (-1)^2 = 3.$$

Agora, calculamos o limite:

$$m = tg(\alpha) = \lim_{x \to x_0} \frac{y - y_0}{x - x_0} = \lim_{x \to -1} \frac{(4 - x^2) - 3}{x - (-1)} = \lim_{x \to -1} \underbrace{\frac{-x^2 + 1}{x + 1}}_{\frac{0}{0}} = \lim_{x \to -1} \frac{-(x-1)(x+1)}{x+1}$$

$$m = \lim_{x \to -1} (1 - x) = 1 + 1 = 2$$

Concluindo, a equação da reta r é;

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

$$y - 3 = 2[x - (-1)]$$

$$y - 3 = 2x + 2$$

$$y = 2x + 5$$

UNIDADE B

DERIVADAS

1. A DERIVADA COMO FUNÇÃO

Vimos que o limite $\lim_{x \to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ nos dá a inclinação da reta tangente à curva descrita pela função $y=f(x)$ no ponto $(x_0, f(x_0))$. Como esta inclinação geralmente está associada à taxa de variação de uma grandeza de interesse de diversos ramos da ciência, conforme já especificamos anteriormente, o limite destacado recebe denominação própria. Vamos às definições!

DEFINIÇÃO
Seja $y=f(x)$ uma função e x_0 um ponto do seu domínio. Denominamos derivada da função f no ponto x_0 e denotamos $f'(x_0)$, o limite

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}, \text{ quando este existir.}$$

ATENÇÃO
Há várias notações para indicar a derivada de uma função $y=f(x)$. Nós usaremos três das mais tradicionais:
a. $f'(x)$, lê-se: "f linha de x"
b. $\dfrac{dy}{dx}$, lê-se: "derivada de y com relação a x", ou apenas "de y de x"
c. $y'(x)$, lê-se: "y linha de x"

O modo com que montamos o limite e assim expressamos o cálculo da derivada também não é único. É até mais usual expressar a derivada como faremos a seguir.

NOTAÇÃO ALTERNATIVA
Faça $x-x_0=\Delta x$, assim, quando $x \to x_0$, $\Delta x \to 0$ e podemos reescrever:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

ATENÇÃO
Uma função é derivável em um ponto $x=x_0$ somente se ela é contínua nesse ponto.

Exemplos

a. Calcule a derivada da função $f(x)=x^3-4x$ no ponto $x=0$.

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{(x^3-4x)-0^3}{x-0} = \lim_{x \to 0} \frac{x(x^2-4)}{x} = \lim_{x \to 0}(x^2-4) = -4$$

b. Calcule a derivada da função $f(t)=\sqrt{t-2}$ em um ponto t qualquer do seu domínio.

$$f'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t} = \underbrace{\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\sqrt{(t+\Delta t)-2}-\sqrt{t-2}}{\Delta t}}_{\frac{0}{0}}$$

Nesses casos, o caminho é racionalizar:

$$f'(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\sqrt{(t+\Delta t)-2}-\sqrt{t-2}}{\Delta t}\cdot\frac{\sqrt{(t+\Delta t)-2}+\sqrt{t-2}}{\sqrt{(t+\Delta t)-2}+\sqrt{t-2}}$$

$$f'(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\left(\sqrt{(t+\Delta t)-2}\right)^2-\left(\sqrt{t-2}\right)^2}{\Delta t\left(\sqrt{(t+\Delta t)-2}+\sqrt{t-2}\right)}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{(t+\Delta t)-2-(t-2)}{\Delta t\left(\sqrt{(t+\Delta t)-2}+\sqrt{t-2}\right)}$$

$$f'(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta t}{\Delta t\left(\sqrt{(t+\Delta t)-2}+\sqrt{t-2}\right)}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\sqrt{(t+\Delta t)-2}+\sqrt{t-2}}=\frac{1}{\sqrt{t-2}+\sqrt{t-2}}$$

$$f'(t)=\frac{1}{2\sqrt{t-2}}$$

FIM!

É melhor treinar um pouco. Tente refazer os dois exemplos trocando os métodos.

1.1. DERIVADAS LATERAIS

O cálculo da derivada é um processo denominado *derivação*. O processo recebe este nome por justamente construir (derivar) uma função f' a partir de uma função f. Se uma função $f'(x_0)$ existir, dizemos que a função é *derivável* em $x=x_0$. Para isso, $f(x_0)$ deve existir e, como a derivada é um tipo especial de limite, $f'(x_0)$ somente existirá sob condições análogas àquelas apresentadas na unidade 1. Vamos às definições!

> **DEFINIÇÃO**
> Seja $y=f(x)$ uma função e x_0 um ponto do seu domínio. Denominamos derivada à direita da função f no ponto x_0 e denotamos $f'_+(x_0)$, o limite
> $$f'_+(x_0)=\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$, se o limite existir.

Assim como os limites em um ponto $x=x_0$, dizemos que uma função é derivável num determinado ponto somente quando as derivadas laterais à esquerda e à direita neste ponto existem e são iguais.

Exemplo

Verifique se a função $f(x)=|x-2|$ é contínua e derivável em qualquer ponto do seu domínio.

Solução
Da definição de valor absoluto, temos que a função tem comportamento diferente para $x > 2$ e $x < 2$:

$$f(x) = \begin{cases} -(x-2), x < 2 \\ (x-2), x \geq 2 \end{cases} \quad \text{(da definição de valor absoluto)}$$

Exceto para $x = 2$, a função é "bem comportada". Vamos verificar se $f(x) = |x-2|$ é contínua nesse ponto:

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} (2-x) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} (x-2) = 0$$

Logo, $f(x)$ é contínua. Agora vamos calcular as derivadas de f à esquerda e à direita de $x = 2$.

$$f_+'(2) = \lim_{x \to 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x-2} = \lim_{x \to 2^+} \frac{(x-2) - 0}{x-2} = 1$$

$$f_-'(2) = \lim_{x \to 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x-2} = \lim_{x \to 2^-} \frac{-(x-2)}{x-2} = \lim_{x \to 2^-} (-1) = -1$$

CONCLUSÃO
$f(x)$ é contínua em $x = 2$, mas não é derivável nesse ponto.

ATENÇÃO
Quando encontramos derivadas laterais de uma função f diferentes em um determinado ponto, dizemos que este é um ponto anguloso e que f não varia de forma suave nesse ponto.

1.2. REGRAS DE DERIVAÇÃO

Como vimos, calcular a derivada de funções a partir da definição pode ser um processo lento e muito trabalhoso. Por isso, vamos enunciar algumas propriedades que nos possibilitarão encontrar a derivada com alguma facilidade.

1.2.1. Derivada de uma função constante

Se K é uma constante real e $f(x) = K$ para todo x, então $f'(x) = 0$.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{K - K}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 0 = 0 .$$

Costumamos dizer: "a derivada de uma constante é zero".

1.2.2. Derivada de uma potência

Se $n \neq 0$ é um número inteiro e se $f(x) = x^n$, então $f'(x) = nx^{n-1}$.

Não provaremos este resultado, mas, em seguida, faremos alguns exemplos.

1.2.3. Derivada do produto de uma constante por uma função

Se $f(x)$ é uma função derivável e K é uma constante real, então a função

$$g(x) = K \cdot f(x) \text{ tem derivada } g'(x) = K \cdot f'(x).$$

Prova:

$$g'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{Kf(x+\Delta x) - Kf(x)}{\Delta x} = K \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = K \cdot f'(x)$$

Exemplos: calcule $f'(x)$ nos seguintes casos:

a. $f(x) = x$, $g(x) = x^2$, $h(x) = x^3$, $u(x) = x^{-1}$

Solução (vamos usar $f'(x) = nx^{n-1}$):

$$f'(x) = 1 \cdot x^{1-1} = 1 \cdot x^0 = 1$$

$$g'(x) = 2 \cdot x^{2-1} = 2 \cdot x^1 = 2x$$

$$h'(x) = 3 \cdot x^{3-1} = 3x^2$$

$$u'(x) = (-1) \cdot x^{-1-1} = -x^{-2}$$

ATENÇÃO

Se n for um número racional, a regra continua válida!

b. $f(x) = 2x^5$

Solução

$$f'(x) = \left(2x^5\right)' = 2\left(x^5\right)' = 2 \cdot 5x^{5-1} = 10x^4$$

c. $f(x) = \frac{1}{3}x^{-5}$

Solução

$$f'(x) = \left(\frac{1}{3}x^{-5}\right)' = \frac{1}{3}\left(x^{-5}\right)' = \frac{1}{3} \cdot (-5)x^{-5-1} = -\frac{5}{3}x^{-6}$$

1.2.4. Derivada da soma, do produto e do quociente de funções

Se $f(x)$ e $g(x)$ são funções deriváveis, então:

a. a função $h(x) = f(x) \pm g(x)$ tem derivada dada por $h'(x) = f'(x) \pm g'(x)$.

b. a função $h(x) = f(x) \cdot g(x)$ tem derivada dada por $h'(x) = f'(x) \cdot g(x) + g'(x) \cdot f(x)$.

c. a função $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, com $g(x) \neq 0$, tem derivada dada por $h'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - g'(x) \cdot f(x)}{\left[g(x)\right]^2}$.

Não provaremos esses resultados, apenas faremos exemplos de aplicações.

Exemplos: calcule $f'(x)$ nos seguintes casos:

a. $f(x) = 2x^5 + \frac{1}{3}x^{-5}$ (exemplo anterior!)

Solução

$$f'(x) = \left(2x^5 + \frac{1}{3}x^{-5}\right)' = \left(2x^5\right)' + \left(\frac{1}{3}x^{-5}\right)' = 10x^4 + \left(-\frac{5}{3}x^{-6}\right) = 10x^4 - \frac{5}{3}x^{-6}$$

b. $f(x) = \frac{x}{x-2}$, com $x \neq 2$.

Solução

$$f'(x) = \left(\frac{x}{x-2}\right)' = \frac{(x)'(x-2)-(x-2)'(x)}{(x-2)^2} = \frac{1\cdot(x-2)-1\cdot(x)}{(x-2)^2} = \frac{-2}{(x-2)^2}$$

> **ALERTA**
> Aqui definimos $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ e fizemos $f'(x) = \frac{u'(x)\cdot v(x) - v'(x)\cdot u(x)}{\left[v(x)\right]^2}$.

c. $f(x) = x\sqrt{x-2}$

Solução

Aqui usaremos a regra $f'(x) = u'(x)\cdot v(x) + v'(x)\cdot u(x)$.

$f'(x) = (x)'\left(\sqrt{x-2}\right) + \left(\sqrt{x-2}\right)'(x)$, mas $(x)' = 1$ e $\left(\sqrt{x-2}\right)'$ é:

$$\left(\sqrt{x-2}\right) = \left[(x-2)^{\frac{1}{2}}\right]' = \frac{1}{2}\cdot(x-2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2(x-2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{x-2}}$$

Substituindo na primeira expressão...

$$f'(x) = 1\cdot\sqrt{x-2} + \frac{1}{2\sqrt{x-2}}\cdot x = \sqrt{x-2} + \frac{x}{2\sqrt{x-2}}$$

2. UMA APLICAÇÃO MUITO IMPORTANTE: A DERIVADA COMO TAXA DE VARIAÇÃO

Já vimos como a derivada é usada para calcular inclinações, porém, a derivada também pode ser usada para calcular a taxa de variação de uma variável em relação à outra. Aplicações envolvendo taxas de variação aparecem em muitas outras áreas de conhecimento.

Crescimento populacional, taxa de produtividade, taxa de fluxo de água, velocidade e aceleração são alguns exemplos em que se encontra a aplicação da taxa de variação.

Uma aplicação corriqueira da taxa de variação é descrever o movimento de um objeto que se desloca em trajetória retilínea. Nesse caso, é comum usar uma reta horizontal ou vertical, em que é fixada uma origem, para representar a trajetória do objeto. Numa reta como essa, podemos arbitrariamente considerar um deslocamento para a direita (para cima) como sendo na direção positiva e um deslocamento para a esquerda (para baixo) como sendo na direção negativa, ficando a critério de quem está resolvendo o problema.

A função s que determina a posição do objeto (em relação à origem) como uma função do tempo t é denominada função posição. Se, no intervalo de tempo Δt, a posição do objeto variar de $\Delta s = s(t+\Delta t) - s(t)$, então, usando a expressão

$$\text{taxa} = \frac{\text{distância}}{\text{tempo}},$$

temos que a velocidade média é dada por:

$$v_{med} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s - s_0}{t - t_0}$$

Assim, por exemplo, se sabemos que um carro andou 40 km em ½ hora por uma estrada reta, afirmamos que a velocidade média durante o percurso foi de:

$$v_{med} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{40}{1/2} = 80 \text{ km/h}.$$

Porém, com essas informações, não podemos dizer qual a velocidade que o velocímetro de carro está marcando num determinado tempo t.

Agora vamos supor que conhecemos $s = f(t)$. Vamos calcular essa média no menor intervalo de tempo possível, junto a um instante t_1. Nós sabemos fazer isso! Basta escolher um tempo t arbitrário, calcular v_{med} no intervalo $\Delta t = t - t_1$ e fazer $\Delta t \to 0$, ou seja, $t \to t_1$:

$$v(t_1) = \lim_{t \to t_1} \frac{s(t) - s(t_1)}{t - t_1} = s'(t_1) = \frac{ds}{dt}$$

Assim, a velocidade instantânea de uma partícula (que executa movimento retilíneo) num determinado tempo t arbitrário é dada pela derivada da posição $s(t)$ em relação ao tempo.

3. A REGRA DA CADEIA E DERIVAÇÃO IMPLÍCITA

Suponha que você precise calcular a derivada da função $f(x) = \left(3x^2 + 10\right)^2$. Com o que vimos até agora, você certamente desenvolveria o binômio e calcularia a derivada do polinômio resultante. Correto? Vamos ver:

$$f'(x) = \left[\left(3x^2 + 10\right)^2\right]' = \left(9x^4 + 60x^2 + 100\right)' = 36x^3 + 120x$$

SEM PROBLEMAS...

Agora vamos mudar o expoente, $f(x) = \left(3x^2 + 10\right)^{10}$. Certamente você não gostaria de desenvolver este binômio, calcular a derivada e, em seguida, tentar reagrupar os termos. Para esse tipo de tarefa, desenvolveu-se um dos principais teoremas do cálculo, chamado *regra da cadeia*.

Imagine $f(x)$ como uma função composta, $f(x) = u(x) \circ v(x)$ onde $u(x) = x^{10}$ e $v(x) = 3x^2 + 10$. Derivar funções do tipo $f(x) = u\left(v(x)\right) = u(x) \circ v(x)$ é o foco da **regra da cadeia**.

3.1. REGRA DA CADEIA

Seja g uma função derivável em x e f uma função derivável em $g(x)$. A função composta $f \circ g$ também é derivável em x e a derivada é dada por

$$\left(f \circ g\right)'(x) = f'\left(g(x)\right) \cdot g'(x).$$

NOTAÇÃO USUAL

Sejam $y = g(u)$, $u = f(x)$ e suas respectivas derivadas $\frac{dy}{du}$ e $\frac{du}{dx}$. A derivada de y com relação a x existe, é dada pela regra da cadeia e, geralmente, é escrita na forma:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

ATENÇÃO

A regra da cadeia é aplicada sucessivamente, quantas vezes forem necessárias (por isso regra da "cadeia"). Exemplo:

$$\left(f \circ g \circ h\right)'(x) = f'\left(g\left(h(x)\right)\right) \cdot g'\left(h(x)\right) \cdot h'(x)$$

Exemplo

Use a regra da cadeia para encontrar a derivada das funções abaixo:

a. $y = (5x + 10)^2$

Solução

Vamos iniciar indicando as funções conforme a regra $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$:

$y = u^2$ e $u = 5x + 10$, agora calculamos:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = (2u) \cdot (5) = 10u = 10 \cdot (5x + 10) = 50x + 100$$

b. $y = \left(3x^2 + 10\right)^{10}$

Solução

$$y = u^{10} \text{ e } u = 3x^2 + 10$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = (10u^9) \cdot (6x) = 60x \cdot u^9 = 60x \cdot (3x^2 + 10)^9 = 60x(3x^2 + 10)^9$$

ATENÇÃO

A partir de agora, vamos fazer os cálculos diretamente, não mais será identificada explicitamente qual função é "$u(x)$".

c. $y = \sqrt{2x - 3}$

Solução

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \left[\frac{1}{2}(2x-3)^{-\frac{1}{2}}\right] \cdot (2 \cdot 1) = \frac{2}{2(2x-3)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2x-3}}$$

d. $y = \sqrt{(5x + 10)^2 + 2}$

Solução (é recomendado que, neste caso, o leitor identifique as funções e refaça o exercício passo a passo):

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{dx} = \left[\frac{1}{2}\left((5x+10)^2 + 2\right)^{-\frac{1}{2}}\right] \cdot \left[2 \cdot (5x + 10)\right] \cdot \left[5 \cdot 1\right]$$

$$y' = \frac{10(5x+10)}{2\sqrt{(5x+10)^2 + 2}} = \frac{25x + 50}{\sqrt{(5x+10)^2 + 2}}$$

3.2. DERIVAÇÃO IMPLÍCITA

Até agora, trabalhamos somente com funções definidas explicitamente. Agora, como você derivaria a seguinte função com relação a x?

$$y^2 - 3x + 1 = 0$$

Nesses casos, basta aplicar o que chamamos de derivação implícita. Esta técnica é a aplicação da regra da cadeia à expressão para a derivada de potências.

Seja f uma potência de u e este uma função de x. A derivada de $f(u) = u^n$ com relação a x é dada por

$$f'(u) = \left(\left[u(x)\right]^n\right)' = n\left[u(x)\right]^{n-1} \cdot u'(x)$$

Exemplo

Calcule implicitamente a derivada de $y = \sqrt{3x-1}$.

Reescrevendo...

$y^2 - 3x + 1 = 0$, agora derivamos ambos os lados (a derivada de zero é zero!):

$$(y^2 - 3x + 1)' = 0' \;\rightarrow\; (2y)\cdot y' - (3\cdot 1) + 0 = 0 \;\rightarrow\; 2yy' - 3 = 0 \;\rightarrow\; y' = \frac{3}{2y}$$

$$y' = \frac{3}{2\sqrt{3x-1}}$$ $\rightarrow$ Confira este resultado aplicando outro método.

4. DERIVADAS DE FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

As funções trigonométricas têm grande aplicação na Física e nas Engenharias. Por isso, saber descrever as variações instantâneas de grandezas descritas por essas funções tem muita relevância para estes profissionais.

A Tabela B.1 apresenta as derivadas das principais funções trigonométricas. Para aplicar estes resultados, geralmente precisamos fazer uso da regra da cadeia. É recomendado que o estudante memorize ao menos as três primeiras derivadas da lista.

f(u)	f′(u)
sen(u)	cos(u)
cos(u)	−sen(u)
tan(u)	$\sec^2(u)$
cotg(u)	$-\text{cosec}^2(u)$
sec(u)	$\sec(u)\cdot tg(u)$
cosec(u)	$-\text{cosec}(u)\cdot \text{cotg}(u)$

Tabela B.1

Vamos demonstrar alguns desses resultados, aproveitando para melhorar nossas habilidades ao aplicar a definição. Para isso, precisamos de identidades trigonométricas bastante conhecidas:

$$\tan(a) = \frac{\text{sen}(a)}{\cos(a)}; \qquad \text{sen}^2(a) + \cos^2(a) = 1;$$

$$\left.\begin{aligned} \text{sen}(a \pm b) &= \text{sen}(a)\cos(b) \pm \text{sen}(b)\cos(a) \\ \cos(a \pm b) &= \cos(a)\cos(b) \mp \text{sen}(a)\text{sen}(b) \end{aligned}\right\} \text{ Muita atenção com os sinais!}$$

Demonstração 1: $\left(\text{sen}(x)\right)' = \cos(x)$

Da definição, fazendo $y = \text{sen}(x)$, temos:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\text{sen}(x+\Delta x) - \text{sen}(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\text{sen}(x)\cos(\Delta x) + \text{sen}(\Delta x)\cos(x) - \text{sen}(x)}{\Delta x} =$$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\text{sen}(\Delta x)\cos(x) + \text{sen}(x)\left[\cos(\Delta x) - 1\right]}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\text{sen}(\Delta x)\cos(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\text{sen}(x)\left[\cos(\Delta x) - 1\right]}{\Delta x} =$$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \cos(x) \cdot \underbrace{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\text{sen}(\Delta x)}{\Delta x}}_{1} + \lim_{\Delta x \to 0} \text{sen}(x) \cdot \underbrace{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos(\Delta x) - 1}{\Delta x}}_{0} = \cos(x)\cdot(1) + \text{sen}(x)\cdot(0) = \cos(x)$$

Onde usamos o limite trigonométrico fundamental $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\text{sen}(\Delta x)}{\Delta x} = 1$

e a consequência direta $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\cos(\Delta x) - 1}{\Delta x} = 0$.

A demonstração de $\left(\cos(x)\right)' = -\text{sen}(x)$ fica como exercício. Basta seguir os mesmos passos que acabamos de realizar.

Demonstração 2: $\left(\text{tg}(x)\right)' = \sec^2(x)$

Nesse caso, lembramos que $y = \text{tg}(x) = \dfrac{\text{sen}x}{\cos x}$ e usamos os dois primeiros resultados para aplicar a regra da derivada do quociente.

$$y' = \left(\frac{\text{sen}(x)}{\cos(x)}\right)' = \frac{\left[\text{sen}(x)\right]'\cos(x) - \left[\cos(s)\right]'\text{sen}(x)}{\cos^2(x)} = \frac{\cos(x)\cos(x) - \left[-\text{sen}(x)\right]\text{sen}(x)}{\cos^2(x)}$$

$$y' = \frac{\text{sen}^2(x) + \text{sen}^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)} = \sec^2(x)$$

Novamente, vamos deixar a demonstração de $\left(\cot g(x)\right)' = -\text{cosec}^2(x)$ como exercício, esta também é bastante semelhante à que fizemos.

Demonstração 3: $\left(\sec(x)\right)' = \sec(x)\cdot \text{tg}(x)$

Como $y = \sec(x) = \dfrac{1}{\cos(x)}$, esta será fácil de resolver! Vamos usar a regra da cadeia:

$$y' = \left(\left[\cos(x)\right]^{-1}\right)' = (-1)\cdot\left[\cos(x)\right]^{-2}\cdot\left(\cos(x)\right)' = \frac{-1}{\cos^2(x)}\cdot\left(-\text{sen}(x)\right) = \frac{1}{\cos(x)}\cdot\frac{\text{sen}(x)}{\cos(x)}$$

$$y' = \sec(x)\cdot\tan(x)$$

Convidamos você a demonstrar a última. Agora vamos aplicar!

Exemplo: encontre a derivada das seguintes funções:

a. $y = \text{sen}(5x)$

Solução (lembre-se, usaremos diretamente a regra da cadeia!):

$$y' = \left(\text{sen}(5x)\right)' = \left(\cos(5x)\right)\cdot(5\cdot 1) = 5\cos(5x)$$

b. $y = \cos(x^5)$

Solução

$$y' = \left(\cos(x^5)\right)' = \left(-\text{sen}(x^5)\right)\cdot\left(x^5\right)' = \left(-\text{sen}(x^5)\right)\cdot\left(5\cdot x^4\right) = -5x^4\text{sen}(x^5)$$

c. $y = \sec(3x^2+1)$

Solução

$$y' = \left(\sec(3x^2+1)\right)' = \left[\sec(3x^2+1)\cdot\tan(3x^2+1)\right]\cdot(3\cdot 2x^1) = 6x\cdot\sec(3x^2+1)\cdot\tan(3x^2+1)$$

d. $y = \text{sen}^5(2x^3)$

Solução

$$y' = \left(\text{sen}^5(2x^3)\right)' = \left[5\cdot\text{sen}^4(2x^3)\right]\cdot\left(2\cdot 3x^2\right) = 30\text{sen}^4(2x^3)$$

5. DERIVADAS DE FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS

Assim como as funções trigonométricas já trabalhadas, suas inversas também têm grande aplicação. Novamente, apresentaremos uma tabela com as seis principais.

f(u)	f'(u)
arcsen(u)	$\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}$
arccos(u)	$\frac{-1}{\sqrt{1-u^2}}$
arctg(u)	$\frac{1}{1+u^2}$
arccotg(u)	$\frac{1}{1+u^2}$
arcsec(u)	$\frac{1}{\lvert u\rvert.\sqrt{u^2-1}}, \lvert u\rvert > 1$
arccosec(u)	$\frac{-1}{\lvert u\rvert.\sqrt{u^2-1}}, \lvert u\rvert > 1$

Tabela B.2

Não provaremos a maioria dos resultados acima. Faremos apenas dois exemplos para exemplificar o método.

Demonstração 1: $y = \text{arcsen}(x)$
Essas funções devem ser derivadas implicitamente. Para isso, usaremos

$y = \text{arcsen}(x) \;\rightarrow\; \text{sen}(y) = \text{sen}(\text{arcsen}(x)) = x$ (O sen do arcsen é o próprio argumento!)

$$(\text{sen}(y))' = (x)' \;\rightarrow\; \cos(y)(y)' = 1 \;\rightarrow\; y' = \frac{1}{\cos(y)}$$

Mas $\text{sen}^2(a) + \cos^2(a) = 1$ e $\text{sen}(y) = x$

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1-\text{sen}^2(y)}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Demonstração 2: $y = \text{arctg}(x)$.
Calculando a tangente em ambos os lados temos $\text{tg}(y) = x$. Agora, derivamos os dois lados com relação a x:

$$(\text{tg}(y))' = (x)' \;\rightarrow\; \sec^2(y)(y)' = 1 \;\rightarrow\; y' = \frac{1}{\sec^2(y)}, \text{ mas } \sec^2(a) = 1 + \tan^2(a)$$

$$y' = \frac{1}{1+\tan^2(y)} = \frac{1}{1+x^2}$$

As outras demonstrações ficam como exercício.

Exemplo: calcule a derivada da seguinte função inversa:

a. $y = \arccos(3x^5)$

Solução

Basta aplicar a regra da cadeia, fazendo $y = \arccos(u)$, com $u = 3x^5$:

$$y' = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dy} = \left(\frac{-1}{\sqrt{1-u^2}} \right) \cdot \left(3 \cdot 5x^4\right) = \frac{-15x^4}{\sqrt{1-\left(3x^5\right)^2}} = \frac{-15x^4}{\sqrt{1-9x^{10}}}$$

6. DERIVADAS DE FUNÇÕES EXPONENCIAIS E LOGARÍTMICAS

6.1. DERIVADA DA FUNÇÃO EXPONENCIAL

A derivada da função exponencial depende do resultado $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{(a^{\Delta x} - 1)}{\Delta x} = \ln(a)$ que é uma consequência direta do limite fundamental que resulta no número *e*.

Seja $y = f(x) = a^x$, com $a > 0$ e $a \neq 1$. A derivada $f(x)$ com relação a x é dada por

$$y' = a^x \ln(a).$$

Note que a derivada da função exponencial natural $y = e^x$ é a própria função:

$$y' = e^x \underbrace{\ln(e)}_{1} = e^x$$

Demonstração

Vamos usar a definição para encontrar $\left(a^x\right)' = a^x \ln(a)$:

$$\left(a^x\right)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^{x+\Delta x} - a^x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^x (a^{\Delta x} - 1)}{\Delta x} = \underbrace{\lim_{\Delta x \to 0} a^x}_{a^x} \cdot \underbrace{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{(a^{\Delta x} - 1)}{\Delta x}}_{\ln(a)} = a^x \ln(a).$$

Exemplo: calcule a derivada da função $y = f(x) = e^{x^2+2}$.

Solução

$$y' = \left(e^{x^2+2}\right)' = \left(e^{x^2+2}\right)(2 \cdot x) = 2x \cdot e^{x^2+2}$$

6.2. DERIVADA DA FUNÇÃO LOGARÍTMICA

Uma função logarítmica de base a é justamente a função inversa da respectiva exponencial de mesma base. Desse modo, usaremos técnica semelhante àquela utilizada no cálculo das derivadas das funções inversas trigonométricas.

Seja $y = f(x) = \log_a(x)$, com $a > 0$ e $a \neq 1$. Aplicando a exponencial de base a em ambos os lados, obtemos:

$a^y = a^{\log_a(x)} \rightarrow a^y = x$. Derivando implicitamente com relação a x,

$$\left(a^y\right)' = (x)' \rightarrow a^y \cdot \ln(a) \cdot y' = 1 \text{. Mas, } a^y = x \text{, logo}$$

$$y' = \frac{1}{x\ln(a)}$$

Observe que a derivada do logaritmo natural é apenas:

$$y' = \frac{1}{x}$$

Exemplo
Calcular a derivada de $y = f(x) = x^2 \ln(3x)$.

Solução
Vamos aplicar a regra do produto $(uv)' = u'v + v'u$:

$$y' = \left(x^2\right)' \ln(3x) + \left(\ln(3x)\right)' x^2 = 2x \cdot \ln(3x) + \frac{(3x)'}{3x} \cdot x^2 = 2x\ln(3x) + x$$

UNIDADE C
APLICAÇÕES DAS DERIVADAS

1. EXTREMOS DE FUNÇÕES

No cálculo, dedica-se muito tempo e esforço para determinar o comportamento de uma função em um intervalo I. Será que f tem um valor máximo em I? Será que tem um valor mínimo? Onde a função é crescente? Onde é decrescente? Neste capítulo, você aprenderá como usar derivadas para responder a estas perguntas. Você verá também por que essas questões são importantes nas aplicações do nosso cotidiano.

1.1. DEFINIÇÃO DE EXTREMOS

Seja f uma função definida num intervalo I que contenha o ponto x_0.

- $f(x_0)$ é o mínimo de f em I se $f(x_0) \leq f(x)$ para todo x pertencente a I.
- $f(x_0)$ é o máximo de f em I se $f(x_0) \geq f(x)$ para todo x pertencente a I.

Dizemos que o mínimo e o máximo de uma função em um intervalo são os valores extremos da função neste intervalo.

Uma função pode conter mais de um mínimo ou máximo definidos em subintervalos de um outro intervalo maior. Nesse caso, um extremo qualquer será chamado mínimo ou máximo local e um extremo que satisfaça uma das condições listadas para todo o intervalo maior é chamado de mínimo absoluto e máximo absoluto neste intervalo.

Uma função não precisa apresentar valores extremos em um intervalo. Veja como exemplo a Figura C.1, onde apresentamos três situações envolvendo a função $f(x) = 4 - x^2$, com variações em seu domínio. Na Figura C.1a, vemos que $f(x)$ possui tanto máximos quanto mínimos. Note que o ponto (1,3) é um mínimo local, enquanto que os pontos (-2,0) e (0,4) são extremos absolutos (o primeiro é um mínimo absoluto e o segundo é um máximo absoluto). Já a função da curva b não possui mínimo, apenas máximo. Finalmente, observe que uma descontinuidade como aquela apresentada na Figura C.1c faz com que $f(x)$ não tenha um valor máximo.

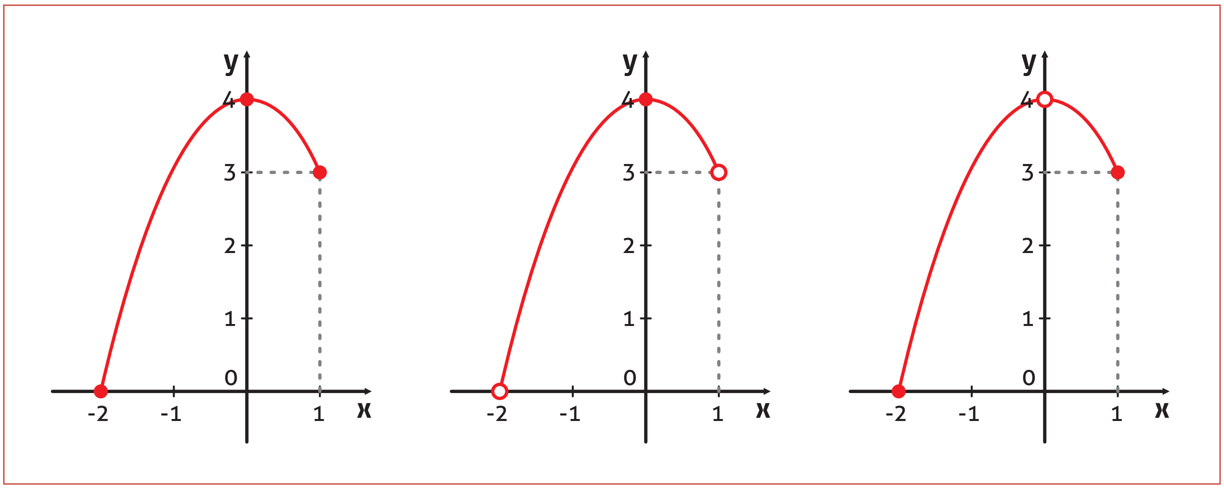


Figura C.1: Exemplo de extremos de funções.

1.2. TEOREMA DO VALOR EXTREMO

O Teorema do Valor Extremo garante a existência de um máximo e um mínimo de uma função f num intervalo fechado. Vejamos:

Se f é contínua no intervalo fechado [a, b], então f tem tanto máximo quanto mínimo nesse intervalo.

Esse é o teorema que garante a existência de valores mínimo e máximo, mas não mostra como encontrar esses valores. Use os recursos referentes a valores extremos de uma ferramenta gráfica para encontrar os valores mínimo e máximo de cada uma das seguintes funções.

$f(x) = x^2 - 4x + 5$, no intervalo fechado $[-1,3]$.
$f(x) = x^3 - 2x^2 - 3x - 2$, no intervalo fechado $[-1,3]$.

1.2.1. Extremos relativos e números críticos

Na Figura C.2, o gráfico de $f(x) = x^3 - 3x^2$ tem um máximo relativo em (0,0) e um mínimo relativo em (2,-4). Informalmente, podemos pensar em um máximo relativo como a ocorrência de uma "montanha" no gráfico e em um mínimo relativo como a ocorrência de um "vale" no gráfico. Tais montanhas e vales podem ocorrer de duas formas. Se a montanha (ou vale) for suave e arredondada, o gráfico tem uma linha tangente horizontal no ponto mais alto (ou no ponto mais baixo). Se a montanha (ou vale) for aguda (um "bico"), o gráfico representa uma função que não é diferenciável no ponto mais alto (ou no ponto mais baixo).

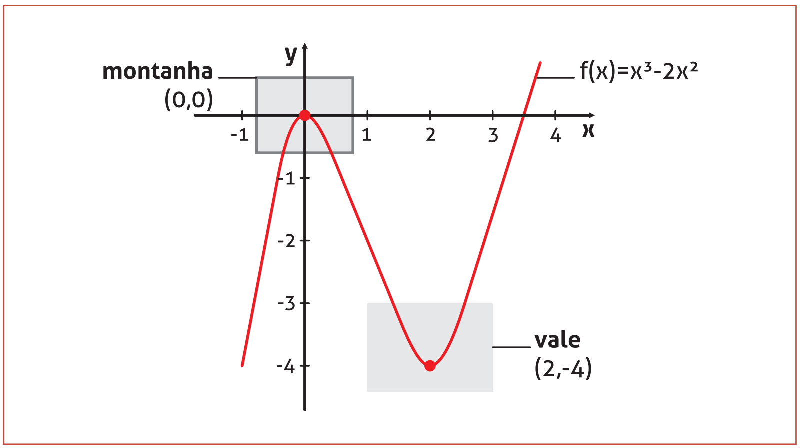


Figura C.2: Exemplos de extremos relativos de funções.

1.2.2. Definições formais dos extremos relativos:

Se existe um intervalo aberto contendo x_0 *no qual* $f(x_0)$ *é um máximo, então* $f(x_0)$ *é chamado de máximo relativo de* f*, ou podemos ainda dizer que* f *tem um máximo relativo em (*x_0*,* $f(x_0)$*).*

Se existe um intervalo aberto contendo x_0 *no qual* $f(x_0)$ *é um mínimo, então* $f(x_0)$ *é chamado de mínimo relativo de* f*, ou podemos ainda dizer que* f *tem um mínimo relativo em (*x_0*,* $f(x_0)$*).*

Observe que a derivada no máximo relativo ou é nula ou não existe. Os valores de x nesses pontos especiais são chamados de números críticos. A Figura C.3 mostra dois tipos distintos de números críticos, um onde a derivada de f não existe (b) e outro onde $f'(x_0)$ é nula (a), representada pela reta horizontal em azul.

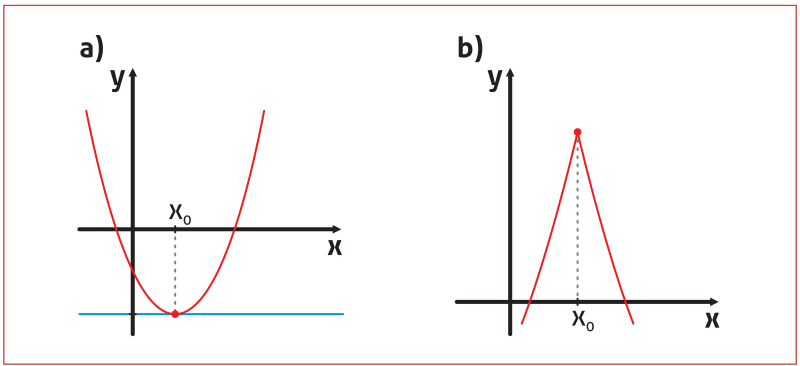


Figura C.3: Dois tipos distintos de números críticos. A reta em azul representa a derivada de f no ponto x_0.

TEOREMA

Seja f uma função definida em x_0. Se $f'(x_0) = 0$ ou se f não é diferenciável em x_0, então x_0 é um número crítico de f.

1.2.3. Encontrando extremos em um intervalo fechado

O Teorema acima afirma que os extremos relativos de uma função f podem ocorrer apenas nos números críticos da função. Sabendo disso, vamos listar uma sequência de procedimentos usados para encontrar os extremos de f em um intervalo fechado [a,b]. São eles:

a. Ache os números críticos de f em [a,b];
b. Calcule f em cada número crítico em [a,b];
c. Calcule f nas extremidades de [a,b];
d. O menor desses valores é o mínimo absoluto de f em [a,b] e o maior valor é o máximo absoluto.

Exemplo: encontre o valor máximo absoluto e o mínimo absoluto da função $f(x) = 2x^5 - 5x^3$ definida no intervalo $\left[-\frac{3}{2}, \frac{7}{4}\right]$:

Solução

Observe o gráfico de $f(x)$ representado na Figura C.4. Perceba que f está definida em um intervalo fechado e que há 5 números críticos.

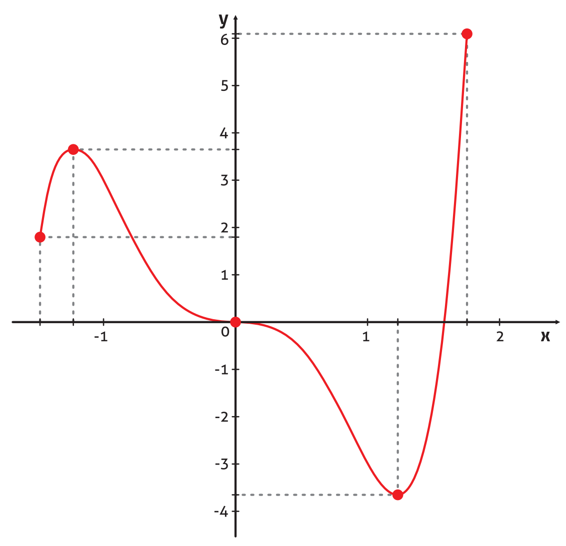


Figura C.4: Gráfico da função $f(x) = 2x^5 - 5x^3$, definida no intervalo $\left[-\frac{3}{2}, \frac{7}{4}\right]$.

Os números críticos são os pontos em que $f'(x) = 0$ ou em que $f'(x)$ não existe. Vamos calcular $f'(x)$:

$$f(x) = 2x^5 - 5x^3 \quad \rightarrow \quad f'(x) = 10x^4 - 15x^2$$

Observe que $f'(x)$ é um polinômio e, portanto, existe em todo intervalo $\left[-\frac{3}{2}, \frac{7}{4}\right]$. Agora, encontramos os pontos em que $f'(x) = 0$:

$$f'(x) = 10x^4 - 15x^2 = 0 \quad \to \quad 5x^2(2x^2 - 3) = 0$$

$$5x^2 = 0 \qquad \text{ou} \qquad 2x^2 - 3 = 0$$

$$x = 0 \qquad x^2 = \frac{3}{2} \quad \therefore \quad x = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$$

Agora, calculamos f em cada número crítico em $\left[-\frac{3}{2},\frac{7}{4}\right]$. O resultado é mostrado na Tabela C.1.

x	f(x)	COMENTÁRIO
$-\frac{3}{2}$	$\frac{27}{16} = 1,6875$	Mínimo local
$-\sqrt{\frac{3}{2}}$	3,674...	Máximo local
0	0	Ponto de inflexão
$\sqrt{\frac{3}{2}}$	-3,674...	Mínimo absoluto de f em $\left[-\frac{3}{2},\frac{7}{4}\right]$
$\frac{7}{4}$	6.029...	Máximo absoluto de f em $\left[-\frac{3}{2},\frac{7}{4}\right]$

Tabela C.1

ATENÇÃO

Como podemos ver na Figura C.4, o ponto (0,0) não é um extremo da função f. Esse ponto recebe uma denominação especial (ponto de inflexão), porque nele a função muda sua concavidade. No decorrer do curso de cálculo, veremos uma forma totalmente algébrica de encontrá-lo, usando derivadas.

2. TEOREMA DE ROLLE E TEOREMA DO VALOR MÉDIO

2.1. TEOREMA DE ROLLE

Vimos, na seção anterior, que o Teorema do Valor Extremo garante que uma função contínua em um intervalo fechado [a, b] tem tanto um mínimo quanto um máximo neste intervalo. Entretanto, não é garantida a existência de máximos e mínimos além daqueles que ocorrem nas extremidades. O Teorema de Rolle nos dá condições de garantir a existência de valores extremos mesmo em um **INTERVALO ABERTO**.

ATENÇÃO

Aqui, por definição, os extremos estão excluídos.

TEOREMA

Seja f uma função contínua em um intervalo fechado [a,b] e diferenciável no intervalo aberto (a,b). Se $f(a) = f(b)$ então existe pelo menos um número x_0 em (a,b) tal que $f'(x_0) = 0$.

DEMONSTRAÇÃO

Seja $f(a) = K = f(b)$. Observamos três casos:

Caso I

Se $f(x) = K$ para todo $x \in [a,b]$, f é constante nesse intervalo e, assim, $f'(x) = 0$ para todo $x \in (a,b)$.

Caso II

Suponha $f(x) > K$ para algum $x \in (a,b)$. Pelo Teorema do Valor Extremo, sabemos que f tem um máximo em algum ponto $x = x_0$ desse intervalo. Além disso, como $f(x) > K$, este máximo não ocorre em nenhuma das extremidades. Portanto, f tem máximo no intervalo aberto (a,b), o que implica que $f(x_0)$ é um máximo relativo e x_0 é um número crítico de f. Finalmente, já que f é diferenciável em (a,b), podemos concluir que $f'(x_0) = 0$.

Caso III

Se $f(x) < K$ para algum $x \in (a,b)$, a demonstração é análoga ao Caso II, porém envolve um valor mínimo ao invés de máximo.

Pelo Teorema de Rolle, podemos ver que, se uma função f é contínua em [a,b] e diferenciável em (a,b), e se $f(a) = f(b)$, existe pelo menos um valor de x entre a e b no qual o gráfico de f tem uma tangente horizontal, conforme é mostrado na Figura C.5a. Já a Figura C.5b mostra que a hipótese de diferenciabilidade é uma condição necessária, pois em b) há um máximo relativo e a função ilustrada não possui nenhum ponto com $f'(x) = 0$ em (a, b).

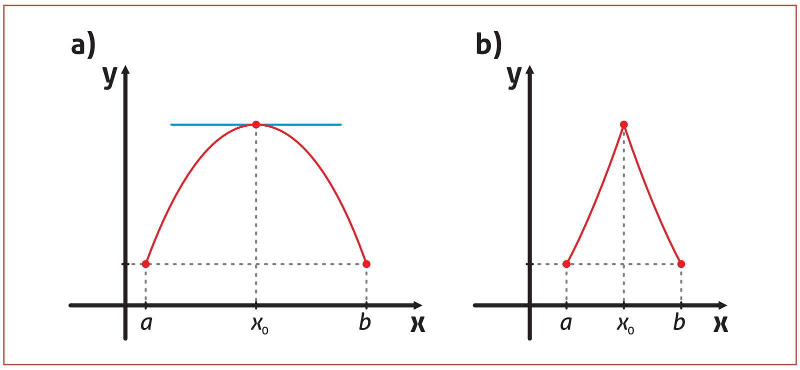


Figura C.5: Na parte b, o Teorema de Rolle não é válido.

Exemplo: encontre os pontos de intersecção entre a função $f(x) = x^2 - 5x + 5$ e a reta $y = -1$ e verifique que realmente há um ponto entre eles com $f'(x)$.

Solução

Na intersecção, $f(x) = x^2 - 5x + 5 = -1$. Assim:

$x^2 - 5x + 6 = 0 \;\rightarrow\; x_1 = 2$ e $x_2 = 3$. Agora vamos procurar pontos críticos:

$f'(x) = \left(x^2 - 5x + 5\right)' = 2x - 5$. Assim, a $f'(x)$ existe em todos os pontos entre $x_1 = 2$ e $x_2 = 3$. Vamos verificar se $f'(x) = 0$ para algum ponto no intervalo [a,b]:

$$f'(x) = 2x - 5 = 0$$

$$x = x_0 = \frac{5}{2} = 2{,}5$$

ATENÇÃO

Dependendo da função e do intervalo, podem existir mais pontos com derivada nula.

2.2. TEOREMA DO VALOR MÉDIO

O Teorema de Rolle é um caso especial do Teorema do Valor Médio e será usado para demonstrá-lo. Vamos ver o enunciado.

TEOREMA

Seja f uma função contínua em um intervalo fechado [a,b] e diferenciável no intervalo aberto (a,b). Existe um ponto $x_0 \in (a,b)$ tal que

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

DEMONSTRAÇÃO

Para fazer a demonstração, vamos nos apoiar na Figura C.6 e no Teorema de Rolle. Veja (encontre esta equação!) que a equação da reta secante que passa pelos pontos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$ é

$$y = \left[\frac{f(b) - f(a)}{b - a}\right](x - a) + f(a).$$

Agora, vamos definir uma função $g(x)$ dada pela diferença entre a função $f(x)$ e a reta y:

$$g(x) = f(x) - \left[\frac{f(b) - f(a)}{b - a}\right](x - a) + f(a)$$

Note que, da maneira com que g foi definida, $g(a) = g(b) = 0$ e como f e y são contínuas e diferenciáveis em (a,b), g também tem essas propriedades em (a,b). Assim, o Teorema de Rolle garante que existe $x_0 \in (a,b)$ tal que $g'(x_0) = 0$. Daí,

$$g'(x) = \left(f(x) - \left[\frac{f(b) - f(a)}{b - a}\right](x - a) + f(a)\right)' = f'(x) - \left[\frac{f(b) - f(a)}{b - a}\right],$$

$$g'(x_0) = f'(x_0) - \left[\frac{f(b) - f(a)}{b - a}\right] = 0,$$

$$f'(x_0) = \left[\frac{f(b) - f(a)}{b - a}\right]$$

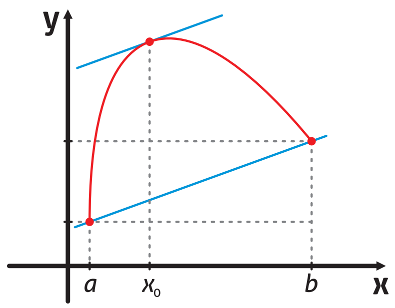


Figura C.6: Esquema ilustrativo usado para a demonstração do Teorema do Valor Médio.

Embora o Teorema do Valor Médio possa ser usado diretamente na solução de problemas, ele é mais frequentemente usado para demonstrar outros teoremas. Na realidade, algumas pessoas consideram que este seja o teorema mais importante do cálculo.

O Teorema do Valor Médio tem implicações para as duas interpretações básicas da derivada. Geometricamente, o teorema garante a existência de uma reta tangente paralela à reta secante pelos pontos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$, como mostra a Figura C.6. O próximo exemplo ilustra a interpretação geométrica do Teorema do Valor Médio em termos de taxa de variação. Este teorema implica que deve existir um ponto no intervalo aberto (a, b) no qual a taxa de variação instantânea é igual à taxa de variação média sobre o intervalo fechado [a,b].

Exemplo: descubra a abscissa do ponto em que a reta tangente a função $f(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$ é paralela à reta que a corta nos pontos de abscissas $x_1 = \frac{1}{2}$ e $x_3 = 3$.

Solução

Chamando de m a abscissa do ponto procurado e lembrando o teorema do valor médio, temos que esse ponto é tal que

$f'(m) = \dfrac{f(3) - f\left(\frac{1}{2}\right)}{3 - \frac{1}{2}}$. Assim, vamos calcular essas quantidades:

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = 1 - \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = -3 \quad \text{e} \quad f(3) = 1 - \frac{1}{(-3)^2} = \frac{8}{9}$$

$$f'(x) = \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)' = \frac{2}{x^3} \quad \rightarrow \quad f'(m) = \frac{2}{m^3}$$. Agora, calculamos m:

$\dfrac{2}{m^3} = f'(m) = \dfrac{\frac{8}{9} - (-3)}{3 - \frac{1}{2}} = \dfrac{14}{9}$, o que nos leva a $m^3 = \dfrac{9}{7}$. Finalmente,

$$m = \sqrt[3]{\frac{9}{7}}$$

3. TAXAS RELACIONADAS

Se $s = s(x)$ é a função horária do movimento retilíneo de um corpo, então a velocidade média desse corpo é dada por $v_m = \dfrac{\Delta s}{\Delta t}$ e a velocidade instantânea é a dada pela derivada

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t} = s'(t).$$

Já a aceleração média é $a_m = \dfrac{\Delta v}{\Delta t}$ e a aceleração instantânea é

$$a(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t} = v'(t) \cdot$$

As razões v_m e a_m são exemplos de taxas médias de variação num intervalo Δt e seus limites, $v(t)$ e $a(t)$, $\Delta t \to 0$, são exemplos de taxas instantâneas de variação num ponto ou, simplesmente, taxas de variação num ponto. De uma forma geral, se $y = y(x)$ é uma função qualquer, a razão $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ é chamada de taxa média de variação da função y no intervalo $[\, x , x + \Delta x \,]$ e a derivada

$y'(x) = \displaystyle\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{y(x + \Delta x) - y(x)}{\Delta x}$ é chamada de taxa de variação da função y no ponto x. Costumamos dizer:

> Toda taxa de variação pode ser interpretada como uma derivada.

Exemplo

Suponha que água escoe de um tonel e se espalhe de forma circular sobre um piso horizontal, de modo que o raio do círculo descrito pela água cresce a uma taxa de 50 centímetros por minuto. Com que velocidade a área do derramamento está crescendo no imediato instante em que o raio atinge 10 metros?

Solução

A taxa com que o raio aumenta é de 0,50 m/min. Essa taxa de variação pode ser escrita como $\frac{dr}{dt} = 0,5$ m/min. Queremos calcular a taxa com que a área cresce em relação ao tempo. Podemos denotar esta taxa de variação como $\frac{dA}{dt} = \frac{d(\pi r^2)}{dt} = 2\pi r \frac{dr}{dt}$ (lembre-se da regra da cadeia $\frac{dA}{dt} = \frac{dA}{dr} \cdot \frac{dr}{dt}$). Assim, $\frac{dA}{dt} = 2\pi r \cdot 0,5 = \pi r$. Quando o raio atingir 10 metros, a área do derramamento estará crescendo a uma taxa de $\frac{dA}{dt} = \pi \cdot 10 = 10\pi m^2 / min$.

Interpretando a derivada dessa forma, podemos resolver diversos problemas das ciências que envolvem razões instantâneas de variação. Entre eles, vamos destacar, na próxima seção, um problema envolvendo taxas de variação de variáveis relacionadas, denominado problema de taxas relacionadas.

3.1. DIRETRIZES PARA RESOLVER PROBLEMAS DE TAXA DE VARIAÇÃO – TAXAS RELACIONADAS

a. Desenhe uma figura para auxiliar a interpretação do problema;
b. Identifique as taxas que são conhecidas e a que será calculada;
c. Encontre uma equação que relacione a quantidade cuja taxa será encontrada, com as quantidades cujas taxas são conhecidas;
d. Derive esta equação em relação ao tempo. Use a regra da cadeia ou a derivação implícita para determinar a taxa desconhecida;
e. Após a taxa desconhecida ser determinada, faça o cálculo no ponto apropriado.

Exemplo

Uma escada com 10 metros de comprimento está sobre uma calçada horizontal e apoiada num poste vertical, conforme a Figura C.7. Se o pé da escada é empurrado na direção do poste a 2 metros por segundo, com que velocidade a ponta sobe em direção ao topo do poste quando o pé da escada está a 6 metros do pé do poste.

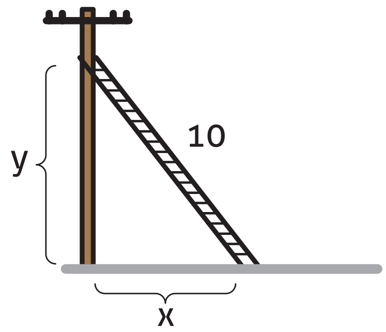


Figura C.7: Exemplo de taxas relacionadas.

Solução

Conforme está esquematizado na Figura C.7, x dá a distância entre o pé da escada e o pé do poste, e y é a altura do topo da escada. Assim, $v_x = \frac{dx}{dt} = -2m/s$ (o sinal negativo é porque x diminui com o tempo) e $v_y = \frac{dy}{dt}$ é a velocidade que estamos procurando (certamente devemos encontrar um valor positivo!).

A relação entre as variáveis é o teorema de Pitágoras. Vamos derivá-la implicitamente com relação ao tempo:

$x^2 + y^2 = 10^2$. Derivando ambos os lados... $2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} = 0$. A taxa que estamos procurando será dada por

$$2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{dy}{dt} = -\frac{x}{y}\cdot\frac{dx}{dt}.$$

Quando $x = 6$ m, $y = \sqrt{100 - x^2} = \sqrt{100 - 6^2} = 8$ m. Finalmente,

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{x}{y}\cdot\frac{dx}{dt} = -\frac{6}{8}\cdot(-2) = \frac{3}{2}\text{ m/s}.$$

4. O DIFERENCIAL

Nesta seção, daremos uma outra interpretação para o símbolo $\frac{dy}{dx}$, até aqui interpretado apenas como uma notação para a derivada de uma função $y = y(x)$ em relação à variável x. Introduziremos, agora, o conceito de diferencial, uma importante ferramenta matemática usada para análise de erros e estimativas de pequenas variações de grandezas relacionadas.

4.1. PEQUENOS INCREMENTOS (ACRÉSCIMOS)

Vamos tomar um valor de x qualquer. Se adicionarmos a x um valor Δx qualquer pertencente aos reais, dizemos que estamos incrementando (fazendo um acréscimo de) Δx ao valor de x.

DEFINIÇÃO

Seja $y = f(x)$ uma função qualquer derivável em certo intervalo de interesse, Δx um acréscimo na variável x e, finalmente, t uma reta tangente ao gráfico de $y = f(x)$ no ponto x.

a. O diferencial de x, denotado por dx, é o valor do incremento Δx, isto é, $dx = \Delta x$.

b. O diferencial de y, denotado por dy, é o valor do incremento na ordenada da reta t correspondente ao incremento Δx em x.

ATENÇÃO

Quando dizemos "incremento" estamos incluindo valores negativos de Δx, os quais seriam, na verdade, decréscimos.

Veja a representação geométrica na figura C.8.

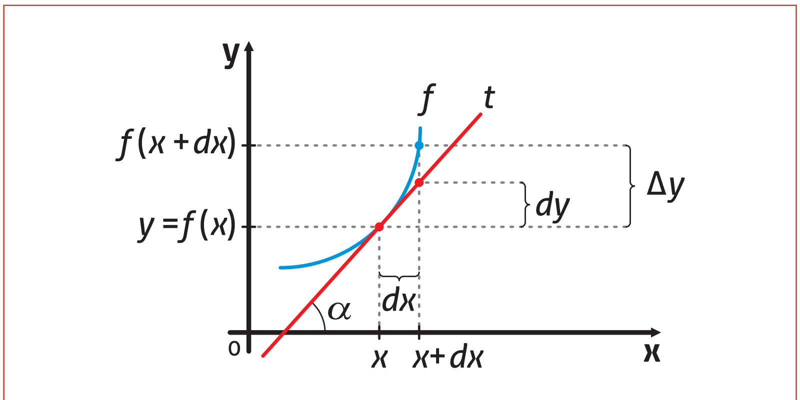


Figura C.8: Representação geométrica do conceito de diferencial.

A inclinação da reta t é dada pela tangente do ângulo α e também pela derivada f no ponto x. Desse modo, identificamos a igualdade:

$$\tan(\alpha) = \frac{dy}{dx} = f'(x) \text{ ou, de outro modo, } dy = f'(x)dx.$$

Agora, perceba que à medida que Δx diminui ($\Delta x \to 0$), $\Delta y \to dy$, e podemos fazer a seguinte aproximação:

$dy = f'(x)dx \quad \approx \quad \Delta y = f(x+dx) - f(x)$, o que nos fornece uma boa aproximação para $f(x+dx)$:

$$f(x+dx) \approx f(x) + f'(x)dx.$$

Exemplo: use o que você aprendeu sobre diferenciais para fazer uma boa aproximação para $\sqrt{626}$:

Solução

Pense na raiz quadrada como a função $f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$. O quadrado perfeito mais próximo de 626 é justamente $625 = 25^2$. Assim, é interessante fazermos:

$x = 625$ e $dx = 1$, de onde temos $f(625) = 25$. Vamos calcular $f'(625)$:

$$f'(x) = \frac{1}{2x^{1/2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \rightarrow \quad f'(625) = \frac{1}{2\sqrt{625}} = \frac{1}{50} = 0{,}02 \text{. Assim,}$$

$$\sqrt{626} = f(625+1) \approx f(625) + f'(625)\cdot 1$$

$$\sqrt{626} \approx 25 + 0{,}02\cdot 1 = 25{,}02\,.$$

Compare com o valor dado pela calculadora! É ou não uma boa aproximação? No caso de funções mais complicadas, essa técnica pode ser a única forma de obter um valor razoável.

5. APROXIMAÇÃO LINEAR

Nesta seção, estudaremos outras situações nas quais o gráfico da função pode ser aproximado por uma linha reta.

Seja f uma função qualquer diferenciável em x_0. A **EQUAÇÃO PARA A RETA TANGENTE** no ponto $(x_0, f(x_0))$ é dada por:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \text{ , de onde temos}$$

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)\,.$$

ATENÇÃO

Você está lembrado da Unidade 2?
$y - y_0 = m(x - x_0)$, onde $m = f'(x_0)$.

A expressão $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ é chamada aproximação linear ou aproximação pela reta tangente de f em $f(x_0)$. Uma vez que x_0, $f(x_0)$ e $f'(x_0)$ são constantes, y é uma função linear de x, sendo este o motivo da nomenclatura utilizada. Agora, restringindo os valores de x a valores suficientemente próximos de valores de x_0, podemos usar essa função como uma aproximação (com qualquer precisão desejada) dos valores da função f nesses pontos. Em outras palavras, quando $x \rightarrow x_0$, $y \rightarrow f(x_0)$.

Exemplo: encontre uma aproximação linear para a função $f(x) = e^{1-x} + \cos(\pi x)$ para pontos próximos de $x = 1$.

Solução

Iniciamos calculando $f(1)$:

$f(1) = e^{1-1} + \cos(\pi \cdot 1) = 1 + (-1) = 0$. Agora vamos calcular $f'(1)$:

$$f'(x) = \left(e^{1-x} + \cos(\pi x)\right)' = -e^{1-x} - \pi \cdot \mathrm{sen}(\pi x)$$

$$f'(1) = -e^{1-1} - \pi \cdot \mathrm{sen}(\pi \cdot 1) = -1 - 0 = -1$$

Finalmente, vamos escrever a aproximação: $y = f(1) + f'(1)(x-1) = 0 + (-1)(x-1)$, de onde temos que a aproximação será:

$$y = 1 - x$$

A tabela compara os valores de y dados pela aproximação linear com os valores de $f(x)$ em pontos da vizinhança de $x = 1$. Observe que quanto mais x se aproxima de 1, melhor é a aproximação. Esta conclusão é reforçada pelo gráfico mostrado na figura C.9, onde vemos que, quando x tende a 1 pela esquerda, a precisão nos valores de $f(x)$ é maior.

ATENÇÃO

Certifique-se de que você percebeu que a aproximação linear de $f(x) = e^{1-x} + \cos(\pi x)$ depende do ponto de tangência. Em um ponto diferente do gráfico de f, você obteria uma aproximação linear diferente.

x	f(x)	y = 1 – x
0,5	1,64872	0,5
0,9	0,15411	0,1
0,99	0,01054	0,01
1	0	0
1,01	-0,00945	-0,01
1,1	-0,04622	0,1
1,5	0,60653	0,5

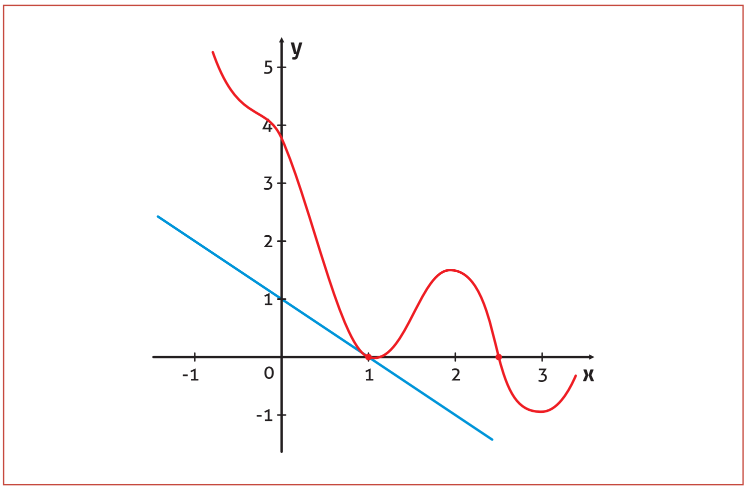


Figura C.9: Aproximação linear de $f(x) = e^{1-x} + \cos(\pi x)$ no ponto (1,0)

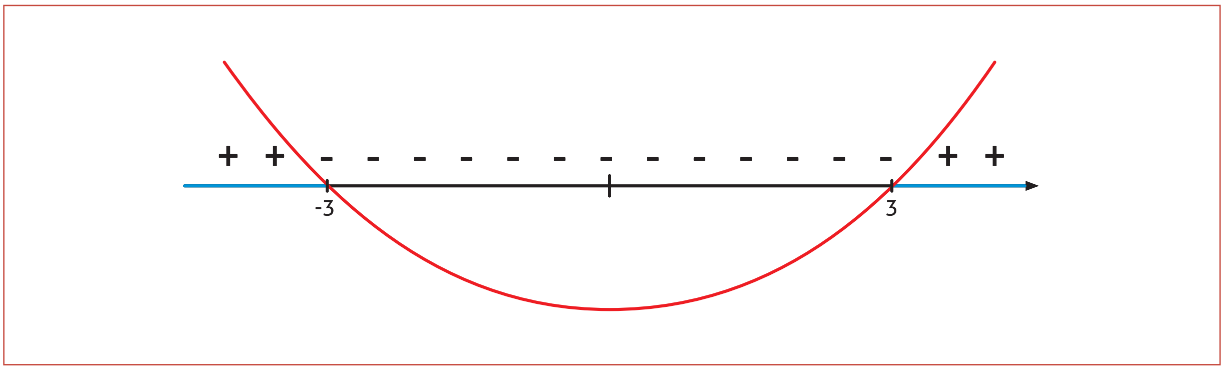
EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Encontre o domínio das seguintes funções:

a. $y = (x-1)^5\sqrt{x^2-9}$

Solução

Esse tipo de análise deve ser feito dividindo-se a função em partes. Note que a expressão $(x-1)^5$ não causa nenhuma restrição ao domínio da função. No entanto, $\sqrt{x^2-9}$ só está definido em $\Re$ sob a condição $x^2-9 \geq 0$. Observe o esboço do gráfico de $y = x^2-9$ no esquema abaixo:



Estão marcados em azul os pontos nos quais y assume valores positivos. Algebricamente, observamos:

$x^2-9 \geq 0$

$x^2 \geq 9$

$|x| \geq 3$

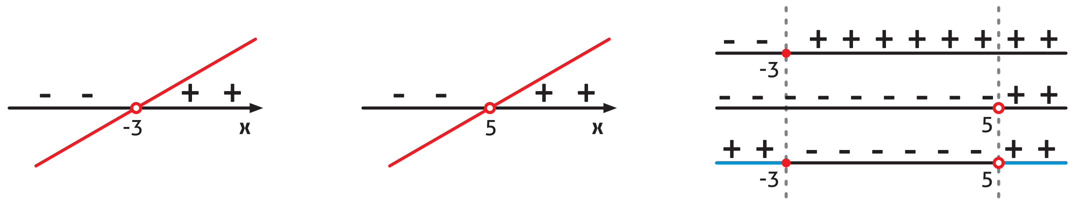
$x \geq 3$ ou $x \leq -3$. Esse resultado nos leva ao mesmo observado na figura. Vamos escrevê-lo formalmente, lembrando que não é necessário fazer a intersecção com restrições de outras partes, já que $(x-1)^5$ é válido para todos os reais:

$$D(f) = \{x \in \Re \mid x \leq -3 \text{ ou } x \geq 3\}\text{, ou, de outra forma, } D(f) =]-\infty,-3] \cup [3,+\infty].$$

b. $y = \sqrt{\dfrac{x+3}{x-5}}$

Solução

Note que a condição $\dfrac{x+3}{x-5} \geq 0$ depende de duas situações, o sinal de $x+3$ e o sinal de $x-5$. Para isso, note que $y_1 = x+3$ troca de sinal no ponto $x=-3$ e $y_2 = x-5$ troca de sinal em $x=5$, mas este ponto não pode pertencer ao domínio da função (divisão por zero!). Para a análise desses sinais, é sugerida uma construção como a representada na figura abaixo:



Com base nas regras de sinais da divisão, concluímos:

$$D(f)=\{x \in \Re \mid x \leq -3 \text{ ou } x > 5\}. \text{ De outra forma, } D(f)=(-\infty,-3] \cup (5,+\infty).$$

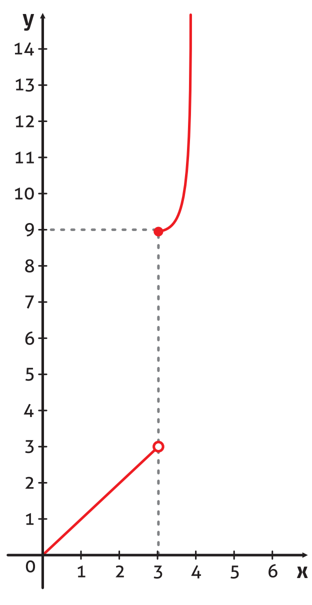
2. Trace o gráfico das funções abaixo:

a. $y=\begin{cases} x, x<3 \\ x^2, x \geq 3 \end{cases}$, no intervalo $[0,6]$.

Solução

Construa uma tabela de pontos que inclua as singularidades e os extremos do intervalo. Note que, neste caso, por uma questão de escala nem todos os pontos vão aparecer no gráfico.

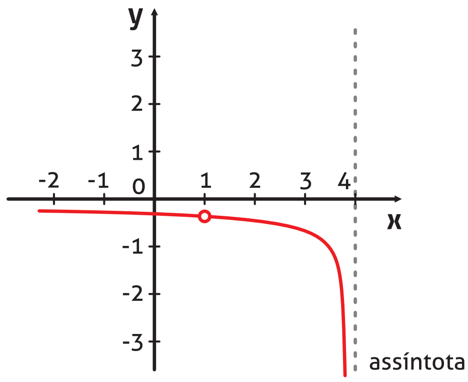
x	0	1	2	3	4	5	6
y	0	1	2	9	16	25	36



b. $y = \dfrac{x-1}{x^2-5x+4}$, no intervalo [-5, 4].

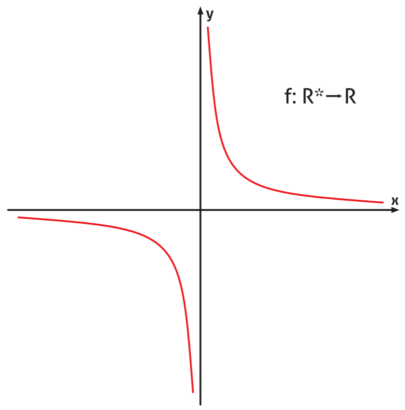
Solução
Idem ao anterior, mas agora você deve ficar atento às indeterminações e ao comportamento da função nas vizinhanças desses pontos.

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	-1/9	-1/8	-1/7	-1/6	-1/5	-1/4	indeterm.	-1/2	-1	indeterm.



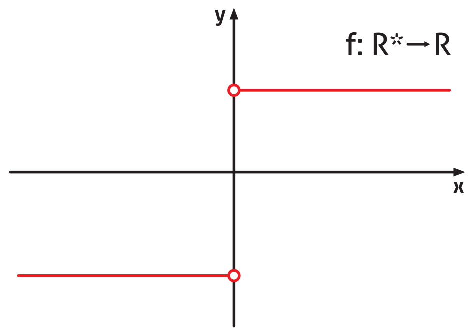
3. Classifique as seguintes funções como injetoras, sobrejetoras , bijetoras ou simples função:

a.



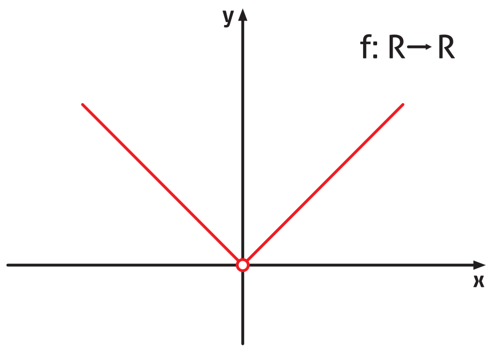
Solução
A função acima é injetora, pois cada valor y da imagem corresponde a um único x do domínio.

b.



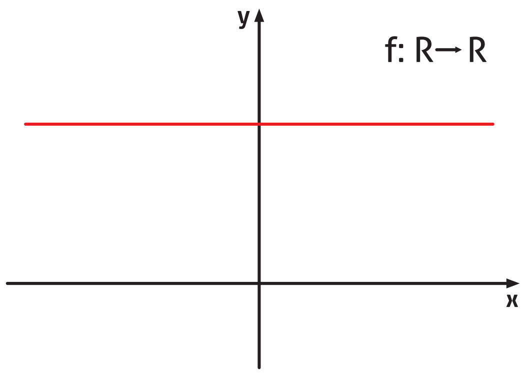
Solução
Esta é uma simples função. Não é sobrejetora, já que a imagem possui apenas dois valores e o contra-domínio é $\Re$. Também, é fácil ver que não é injetora.

c.



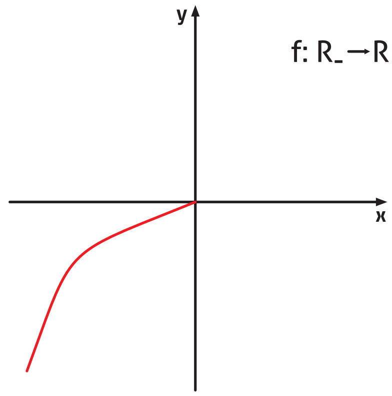
Solução
Esta é uma simples função, pois cada y da imagem é gerado por dois elementos do domínio (não é injetora) e $\text{Im}(f) = \Re_+^* \neq \Re$ (não é sobrejetora).

d.



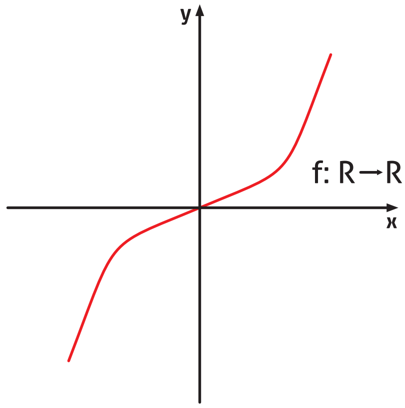
A figura acima é uma simples função. Os motivos são semelhantes àqueles argumentados na letra b.

e.



Injetora, pois para cada valor de y é gerado por um único valor de x.

f.



Bijetora, pois é injetora porque cada valor de y corresponde a um único valor de x e sobrejetora, pois a imagem é igual ao contradomínio.

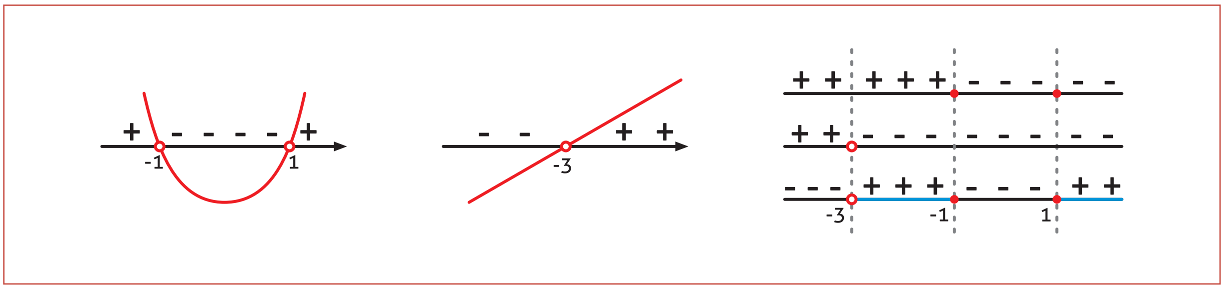
4. Outras variações da determinação de domínio - encontre o domínio das funções abaixo:

a. $y = \sqrt{\dfrac{x^2 - 1}{x + 3}}$

Solução

A função y só retorna valores reais se $\dfrac{x^2 - 1}{x + 3} \geq 0$. Observe a figura abaixo que compara as variações de sinais das expressões do numerador e do denominador. A primeira expressão é uma parábola voltada para cima e que corta o eixo x nos pontos $x = -1$ e $x = 1$, pois:

$x^2 - 1 = 0$ => $x^2 = 1$ => $x = \pm 1$. A segunda expressão é uma reta que corta o eixo x em $x = -3$.



Da análise de sinais acima, concluímos que o domínio de f é:

$$D(f) = \{ x \in \Re \mid -3 < x \leq -1 \text{ ou } x \geq 1 \}. \text{ De outra forma, } D(f) = (-3,-1] \cup [1,+\infty).$$

b. $y = \sqrt{3-x}$

Solução
Esta expressão tem uma análise mais simples, já que seu domínio depende de uma única desigualdade:

$3 - x \geq 0$, o que implica:
$-x \geq -3$, e, finalmente:
$x \leq 3$. Daí, o domínio de $y(x)$ é:
$D(f) = \{ x \in \Re \mid x \leq 3 \}$. De outra forma, $D(f) = (-\infty, 3]$.

c. $y = \log(x^2 - 100)$

Solução (é sugerido que você também construa uma figura!)
Esta expressão também tem análise mais simples. Seu domínio depende da desigualdade $x^2 - 100 > 0$, o que implica $x^2 > 100$. Esta condição resulta que

$|x| > \sqrt{100} = 10$. Mas, se $|x| > 10$, então $x > 10$ ou $x < -10$. Desse modo, escrevemos:

$$D(f) = \{ x \in \Re \mid x < -10 \text{ ou } x > 10 \}.$$

LISTA DE EXERCÍCIOS 1ª SEMANA

Exercício 1: Encontre o conjunto solução das seguintes desigualdades:

a. $|x-2|<7$

b. $|5x-2|\leq 3$

c. $|x-1|<|x+1|$

Exercício 2: Determine o máximo domínio no qual a expressão abaixo define uma função real:

a. $y=\sqrt{2x+9}$

b. $y=\sqrt{4x^2-256}$

c. $y=\sqrt{\cos(4x)}$

Exercício 3: Faça um esboço do gráfico das funções abaixo que englobe a vizinhança de pontos fora do seu domínio:

a. $f(x)=\dfrac{x-1}{x+2}$

b. $f(x)=\dfrac{x^2}{x+2}$

c. $f(x)=x\cdot\sqrt{\dfrac{x}{1-x}}$

LISTA DE EXERCÍCIOS 2ª SEMANA

Exercício 1: Calcule os seguintes limites no infinito:

a. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{9500}{x^2+50}$

b. $\lim\limits_{x\to\infty} 2x^3-2300x^2$

c. $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt[3]{x^5-x^2+x-10}$

Exercício 2: Calcule os limites abaixo:

a. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{5x^2-8x-13}{x^2-5}$

b. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{3x^2-x-10}{x^2-4}$

c. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^4-81}{2x^2-5x-3}$

Exercício 3: Calcule os seguintes limites:

a. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{2x^2-7x+10}{7x^2-4}$

b. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2-x-2}{x^2-1}$

c. $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{x^2+2x-35}{x^2-10x+25}$

d. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2+2x-35}{x^2-10x+25}$

e. $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x^2+2x-35}{x^2-10x+25}$

LISTA DE EXERCÍCIOS 3ª SEMANA

Exercício 1: Determine se a função abaixo é contínua $x = 3$.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{4} - 1, & \text{se} \quad x \neq 3 \\ 1, & \text{se} \quad x = 3 \end{cases}$$

Exercício 2: Determine se a seguinte função é contínua em $x = -2$.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 3x - 2, & \text{se} \quad x \neq -2 \\ x^3 - 5x + 2, & \text{se} \quad x = -2 \end{cases}$$

Exercício 3: Determine se a seguinte função é contínua em $x = 0$.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-18}{x-6}, & \text{se} \quad x < 0 \\ 3, & \text{se} \quad x = 0 \\ \sqrt[3]{8 - 2x^3}, & \text{se} \quad x > 0 \end{cases}$$

LISTA DE EXERCÍCIOS 4ª, 5ª E 6ª SEMANA

Exercício 1: Use a definição de derivada para calcular $f'(x)$ nos seguintes casos:

a. $f(x)=\frac{3}{2}x+1$

b. $f(x)=x^2-3x+2$

Exercício 2: Calcule as derivadas das seguintes funções.

a. $f(x)=\sqrt{2x}$

b. $f(x)=\frac{1}{x\sqrt{x}}$

c. $f'(x)=e^{-3x}$

d. $f(x)=\ln(3x^2+4)$

e. $f(x)=\sqrt{9x^2+4}$

f. $f(x)=\frac{x+1}{1-3x}$

g. $f(x)=\cos(3x-1)$

Exercício 3**:**

Calcule $\frac{dy}{dx}$, sendo que $y=u^{\frac{4}{3}}$ e $u=\ln x$.